Banach 空间选论

俞鑫泰　编著





华东师范大学出版社

(沪)新登字第201号

Banach 空间选论

俞鑫泰　编著

华东师范大学出版社出版发行
(上海中山北路3663号)
新华书店上海发行所经销　江苏句容县排印厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：15　字数：380千字
1992年6月第一版　1992年6月第一次印刷
印数：001——1,500本
ISBN 7-5617-0703-7/O·026　定　价：12.80元

序

本书作者数年前写了“Banach 空间几何理论”一书，余曾为之作序，正如所期望的，该书起了抛砖引玉的作用。

如果说经典分析，作为数学的基础之一，是弄清实(复)数及实(复)函数的结构，那么，现代数学的基础之一，就是弄清无限维(Banach)空间的结构，从近年来，各个数学学科都有推向“无限维研究”这一趋势来看，作好无限维空间结构的研究是十分必要的。

就总体而言，Hilbert 空间作为最有用的无限维空间之一，具有良好的性质，但对一般 Banach 空间，甚至经典的 c_0，l_p $(1\leqslant p\leqslant +\infty)$，$L_p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ 其结构略为逊色。目前对它们的许多基本性质也已初步弄清。

Banach 1932 年曾猜测“是否每个无限维 Banach 空间或含有 c_0，或含有 l_p $(1\leqslant p<+\infty)$?”。经过长期努力，人们否定了这一猜想。由此，Banach 空间结构的复杂性也略见一斑，但是，Dvoretsky 却证明了每个无限维 Banach 空间可“任意接近地”含有有限维 Hilbert 空间。这又从另一方面提供了一种方法：如果在某些问题中可以用有限维“逼近”无限维来处理，那么就能充分利用 Hilbert 空间的良好性质，真使人感到，其中奥妙无穷。数学作为自然科学的明珠将不断放出异彩。

本书作者简明易懂地对 Banach 空间理论的若干重要问题作了很好的归纳总结，使之一目了然，这凝结着作者多年研究心得及创新工作。预期它也会给读者带来福音。

耄耋之年能看到这种欣欣向荣、百花齐放的数学事业的发展，我甚感欣慰。

程其襄

壹玖玖零年肆月拾玖日于沪滨

前　言

作者写完《Banach 空间几何理论》(1986 年华师大出版社出版)后觉得"意犹未尽"。一方面由于 Banach 空间理论的许多重要内容仍未写入该书;另一方面,近年来 Banach 空间理论又有许多重要进展,因此决定再写一本《Banach 空间选论》。本书相对来说是独立的、自完备的。

编写中选择了以下几个重要课题:1. 可补子空间问题。2. 向量值的鞅。3. Lebesgue-Bochner 空间的性质。4. 著名的 Dvoretsky 定理。5. type 和 cotype。6. 各种嵌入问题;c_0, l_p, $1\leqslant p\leqslant +\infty$, $L_p(1\leqslant p\leqslant +\infty)$的性质。

这些内容都是十分重要而有趣的。读完本书后,读者会发现研究 Banach 空间需要用到许多其他学科知识。例如,概率论、组合论、抽象测度论等工具,同时,Banach 空间理论也涉及到解决其他学科提出的问题。随着数学日新月异的发展,"廿一世纪数学将是无限维数学"(陈省身语意),故作为无限维空间理论的 Banach 空间理论将是现代数学的基础之一, 它必将产生重要影响。所以,了解本书的基本内容是很有意义的。

本书仍采用先归纳各种结果然后逐一证明的方式,以利读者参考、阅读。书中有些结果是相当新的(取自近期论文,甚至尚未发表)。

在本书写作过程中,由于作者身体不佳,曾一度耽搁,但终于如愿完成,不能不说是一件高兴的事,在此要感谢上海第六人民医院钱允庆教授、冯昌宁、周文申医生以及我夫人袁伊丽的精心医治和照料。

最后值得指出的是承蒙我父亲老友,香港隆星航业有限公司

总经理程馀馨老先生大力支持，本书才得以顺利出版，作者对程老先生的无私的支持表示衷心的感谢。

作　者

1990.3.18.

本 书 记 号

一、常用空间

$c_0, l_p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, $c_0(\Gamma) = \{(x_r)_{r\in\Gamma}$; 对任$\varepsilon > 0$, $\{r; |x_r| > \varepsilon\}$是有限集$\}$, $l_1(\Gamma) = \{(x_r);\ \sum_{r\in\Gamma}|x_r| < +\infty\}$,

$$l_\infty(\Gamma) = \{(x_r);\ \sup_r |x_r| < +\infty\}.$$

$$L_p = L_p[0,1],\ 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$$

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mu).\ 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$$

$C[0,1]$, $C(\Omega)$, 其中 Ω 为紧 Hausdorff 空间（有时也记 $C(K)$）.

二、一些记号

$S(X) = \{x \in X; \|x\| = 1\}$, $U(X) = \{x \in X; \|x\| \leqslant 1\}$.

$B(x, r) = \{y \in X; \|y - x\| < r\}$.

$\text{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$张成的子空间(类似有 $\text{span}A$).

$\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$张成的闭子空间(类似有 $\overline{\text{span}}(A)$).

$\overline{A}$ 是 A 的范数闭包; $\overline{A}^w$ 是 A 的 w 闭包; $\overline{A}^{w^*}$（或 $\overline{A}^*$）是 A 的 w^* 闭包, $\text{int}A$ 表示 A 的(拓扑)内点全体.

$co(A)$是 A 的凸包; $\overline{co}(A)$是 A 的闭凸包.

$L(X, Y) = \{T: X \longrightarrow Y$ 有界线性算子$\}$.

$K(X, Y) = \{T: X \longrightarrow Y$ 紧线性算子$\}$.

$WK(X, Y) = \{T: X \longrightarrow Y\ w$ 紧线性算子$\}$.

投影 $P: X \longrightarrow Y$ 是有界线性算子, $P^2 = P, PX = Y$.

可补：存在投影 $P: X \longrightarrow Y$, $(Y \subset X)$.

1 可补：存在投影 $P: X \longrightarrow Y$, $\|P\| = 1$.

$\sim$表示(拓扑空间之间)线性同胚.

$\approx$表示线性同胚, $\overset{a}{\approx}$表示线性同胚, 且 $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant a$.

$\cong$表示线性等距.

$d(X,Y)=\inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\|; T: X\longrightarrow Y$ 的线性同胚$\}$.

$d(x,A)=\inf\{\|x-y\|; y\in A\}$.

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_p=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}; x_i\in X_i, \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p\right)^{1/p}<+\infty\}$.

$1\leqslant p<+\infty$.

$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_{\infty}=\{(x_i)_{i=1}^{\infty}; \ x_i\in X_i, \ \sup_i\|x_i\|<+\infty\}$.

$Y^{\perp}=\{x^*\in X^*; (y,x^*)=0, \forall y\in Y\}, (Y\subset X)$.

${}^{\perp}Y=\{x\in X; (x,y^*)=0, \forall y^*\in Y\}, (Y\subset X^*)$.

$\mathrm{Ker}T=\{x; Tx=0\}, R(T)=\{y\in Y; y=Tx$, 对某个 $x\in X\}$ $(T\in L(X,Y))$.

$\mathrm{Card}A$ 表示 A 的基数。

$X\overset{c}{\subset}Y$ 表示 X 是 Y 的可补子空间。

$X\underset{\rightarrow}{\subset} Y$ 表示存在 $Z\subset Y$，使 $X\approx Z$.

$X\underset{\rightarrow}{\overset{c}{\subset}}Y$，表示存在可补子空间 $Z\subset Y$，使 $X\approx Z$.

$\dim E$ 表示 E 的维数。

$X<Y$ 表示对每个 $\varepsilon>0$，X 的每个有限维子空间 X_n，存在 Y 的有限维子空间 Y_n，使 $d(X_n,Y_n)<1+\varepsilon$.

$X\overset{\alpha}{<}Y$，表示对每个有限维子空间 $X_n\subset X$，存在 Y 的有限维子空间 Y_n，使 $d(X_n,Y_n)\leqslant\alpha$.

X/Y 表示商空间。

子空间不作特别说明，一般指闭线性子空间。

目　录

第一章 可补子空间

在一般泛函分析教材中，大家知道，Hilbert 空间 H 的每个闭子空间 M 有正交补。特别地，这意味着 M 在 H 中是1可补的。Hilbert 空间的这个良好的性质，使 Hilbert 空间上算子理论的研究得以顺利展开。然而，对一般 Banach 空间情况却不然。1937 年 Murray[M-1] 证明，如果 $1\leqslant p\neq 2$，则存在 l_p 和 L_p 的不可补子空间。1939 年 Kakutani [K-1] 证明如果 X 是维数 $\geqslant 3$ 的 Banach 空间，则 X 的每子闭子空间是1可补的充要条件是 X≅Hilbert 空间。1971 年 Lindenstrauss 和 Tzafriri [$L-T$ 1] 证明 Banach 空间 X 的每个闭子空间是可补的充要条件为 $X\approx$Hilbert 空间。本章首先给出这个定理的证明。由这个定理看到，对一般 Banach 空间的研究，我们将面临许多困难，必须采用与 Hilbert 空间理论研究不同的方法。此外，本章还对常见的一些序列空间的子空间，特别是可补子空间的性质进行讨论。最后研究 L_p 空间，特别是 L_1 空间的子空间。

§1 每个闭子空间都可补的Banach空间

本节主要证明下述定理：

定理 1.1.1(Lindenstrauss-Tzafriri) 设 X 是 Banach 空间，则 X 的每个闭子空间是可补的充要条件为 X≈Hilbert 空间。

这个定理的证明要用到下面著名的泛函分析中最深刻的定理之一，即 Dvoretsky 定理。

定理 1.1.2 (Dvoretsky) Hilbert 空间 H 在每个无限维

Banach 空间中具有限表示。即，对任何 n 维 Euclid空间 l_2^n（即 H 的任何 n 维子空间）任何 $\varepsilon>0$，总存在线性同胚 T：$l_2^n \longrightarrow X$，使 $d(l_2^n, Tl_2^n) \leqslant 1+\varepsilon$.

注 关于这个定理的证明及进一步讨论将在第四章中给出。□

为了证明定理 1.1.1，我们先给出下面的两个定理。

定理 1.1.3 (Joichi) 若 X 是 Banach 空间且 $X \overset{\lambda}{<}$ Hilbert 空间 H，则 $X \approx H$.

证明 令 $\mathscr{L}=\{L; L$ 是 X 的有限维子空间$\}$，则 $\mathscr{L}$ 按照通常向量加法"+"构成幂等交换半群，且 $\mathscr{L}$ 在包含关系下是偏序集。由 Day 定理(见附录 1)，$\mathscr{L}$ 是顺从(Amenble)半群，即存在 $\mu \in (m(\mathscr{L}))^*$，使

(1) $\|\mu\|=1$;

(2) $\mu(e)=1$，其中 e 是 $m(\mathscr{L})$ 中恒等于 1 的函数;

(3) $\mu(f)=\mu(f_V)$，$\forall f \in m(\mathscr{L})$，$V \in L$，$(f_V(L)=f(L+V)$，$\forall L \in \mathscr{L})$;

(4) $\inf\{f(L); L \in \mathscr{L}\} \leqslant (\mu(f)) \leqslant \sup\{f(L); L \in \mathscr{L}\}$，$\forall f \in m(\mathscr{L})$. 其中 $m(\mathscr{L})$ 表示 $\mathscr{L}$ 上一切有界函数 f 按范数 $\|f\|=\sup\{|f(L)|;\ L \in \mathscr{L}\}$ 构成的 Banach 空间，$(m(\mathscr{L}))^*$ 表示 $m(\mathscr{L})$的共轭空间。

对每个 $x \in X$，令 $p(x)=(\mu(f_x^2))^{\frac{1}{2}}$，其中

$$f_x(L)=\begin{cases}0 & x \notin L \\ \|T_L x\| & x \in L\end{cases}$$

(T_L 是 L 到 Hilbert 空间 H 内的线 性同胚)。

由条件知，

$$\|x\| \leqslant \|T_L x\| \leqslant \lambda \|x\|, \quad \forall x \in L.$$

我们还可证明 $\|x\| \leqslant p(x) \leqslant \lambda \|x\|$，$\forall x \in X$. 事实上，对任 $x \in X$，$p^2(x)=\mu(f_x^2) \leqslant \|f_x^2\| \leqslant \sup\limits_{x \in L} \|T_L x\|^2 \leqslant \lambda^2 \|x\|^2$，另一方面，对

固定 $x_0\in X$，取 $L_0\in\mathscr{L}$，使 $x_0\in L_0$，则

$$\begin{aligned}\|x_0\|^2&\leqslant\inf\{\|T_Lx_0\|^2;L\in\mathscr{L}\}\leqslant\inf\{\|T_{L+L_0}x_0\|^2;L\in\mathscr{L}\}\\&=\inf\{f_{x_0}^2(L+L_0);L\in\mathscr{L}\}=\inf\{(f_{x_0}^2)_{L_0}(L);\in\mathscr{L}\}\\&\leqslant\mu((f_{x_0}^2)_{L_0})=\mu(f_{x_0}^2)=p^2(x_0),\end{aligned}$$

即
$$\|x\|\leqslant p(x)\leqslant\lambda\|x\|,\ \forall x\in X.$$

对任何 $x,y\in X$，令 $L_0=\text{span}\{x_1,x_2\}$，则对任 $L\in\mathscr{L}$，$L\supset L_0$，有

$$\begin{aligned}&2f_x^2(L)+2f_y^2(L)=2\|T_Lx\|^2+\|T_Ly\|^2\\&=\|T_Lx-T_Ly\|^2+\|T_Lx+T_Ly\|^2=f_{x-y}^2(L)+f_{x+y}^2(L).\end{aligned}$$

由此，立即得到

$$\begin{aligned}2p^2(x)+2p^2(y)&=2\mu(f_x^2)+2\mu(f_y^2)=2\mu((f_x^2)_{L_0})+2\mu((f_y^2)_{L_0})\\&=\mu(2(f_x^2)_{L_0}+2(f_y^2)_{L_0})=\mu((f_{x-y}^2)_{L_0}+(f_{x+y}^2)_{L_0})\\&=\mu(f_{x-y}^2)+\mu(f_{x+y}^2)=p^2(x-y)+p^2(x+y),\end{aligned}$$

即 p 满足平行四边形法则。

易见，$p(x)\geqslant 0$，$p(x)=0$ 当且仅当 $x=0$，且

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x).$$

为了证明三角不等式，只须证明 $U_p(x)=\{x;\ p(x)\leqslant 1\}$ 是凸的。反证，若存在 $x,y\in X$，使 $p(x)=p(y)=1$，但 $p(\alpha x+(1-\alpha)y)>1$，对某个 α，$0<\alpha<1$。由 $p(\cdot)$ 的连续性，存在 α_1，α_2，使 $0\leqslant\alpha_1<\alpha<\alpha_2\leqslant 1$，使得 $p(\alpha_ix+(1-\alpha_i)y)=1$，$i=1,2$，且对 $\alpha_1<\beta<\alpha_2$，有 $p(\beta x+(1-\beta)y)>1$。令 $x_i=\alpha_ix+(1-\alpha_i)y$，$i=1,2$。则由平行四边形法则

$$\begin{aligned}4&=2(p^2(x_1)+p^2(x_2))=p^2(x_1+x_2)+p^2(x_1-x_2)\\&\geqslant p(x_1+x_2)^2=4p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2>4.\end{aligned}$$

矛盾。这就证明 $p(\cdot)$ 是 X 上一个范数，从而是 X 上等价的 Hilbert 范数。即 $X\overset{\lambda}{\approx}H$。证毕。

注　若 $X<H$，则对任何 $\varepsilon>0$，$X\overset{1+\varepsilon}{\approx}H$。□

定理 1.1.4 (Davis-Dean-Singer) 若 Banach 空间 X 的每个闭子空间是可补的，则 X 的有限维子空间是一致可补的。即存在 λ，使得对 X 的任何有限维子空间 E，存在投影 P_E: $X \longrightarrow E$，使 $\|P_E\| \leqslant \lambda$.

注 若记 $\lambda(E) = \inf\{\|P\|;$ 投影 $P: X \longrightarrow E\}$，则定理意味着 $\lambda_X \equiv \sup\{\lambda(E);\ E$ 是 X 的有限维子空间$\} \leqslant \lambda$. □

证明 令 $\mathscr{L} = \{L;\ L$ 是 X 的有限维子空间. 反证法，取 $E_1 \in \mathscr{L}$，使 $\lambda(E_1) \geqslant 1$. 取 $A_1 = \{x_1^* \cdots, x_n^*\} \subset S(X^*)$，使

$$\|x\| \leqslant 2\sup\{x_i^*(x),\ 1 \leqslant i \leqslant n\},\ \forall x \in E_1.$$

令 $Y_1 = {}^{\perp}A_1$，令 P_1: $E_1 \oplus Y_1 \longrightarrow E_1$，$P_1(x+y) = x$，$\forall x \in E_1$，$y \in Y_1$，则

$$\|P_1(x+y)\| = \|x\| \leqslant 2\sup\{x_i^*(x);1 \leqslant i \leqslant n\}$$
$$= 2\sup\{x_i^*(x+y);1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant 2\|x+y\|,$$

故 P_1 是有界投影，$P_1(Y_1) = 0$，$\|P_1\| \leqslant 2$.

我们可以选取 $E_2 \in \mathscr{L}$，使 $E_2 \subset Y_1$，且 $\lambda(E_2) \geqslant 2$. 事实上，否则对任 $E_2 \in \mathscr{L}$，$E_2 \subset Y_1$，$\lambda(E_2) < 2$，则对任 $F \in \mathscr{L}$，由于 $F = (F \cap Y_1) \oplus (F \cap E_1)$，从而存在投影 Q_1: $Y_1 \longrightarrow F \cap Y_1$，$Q_2$: $E_1 \longrightarrow F \cap E_1$，$\|Q_1\| < 2$，$\|Q_2\| \leqslant \dim E_1$，从而 $Q = (Q_1, Q_2)$: $X \longrightarrow F$ 是投影且 $\|Q\| \leqslant \max(2, \dim E_1)$，由 F 任意性即知定理得证。

再取有限子集 $A_2 \subset S(X^*)$，使 $A_1 \subset A_2$，且

$$\|x\| \leqslant 2\sup\{x^*(x);x^* \in A_2\},\ \forall x \in E_1 \oplus E_2,$$

令 $Y_2 = {}^{\perp}A_2$，则同上理由可选取投影 P_2: $E_1 \oplus E_2 \oplus Y_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_2$ 使 $\|P_2\| \leqslant 2$. 继续这个过程，可得 (E_n, Y_n, P_n)，使 $\|P_n\| \leqslant 2$，$\lambda(E_n) \geqslant n$，$E_n \subset Y_{n-1}$.

令 $E = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n;\ x_n \in E_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty\right\}$，易见 E 是 X 的闭子空间。下面证明 E 在 X 中不可补. 事实上，若存在投影 P: $X \longrightarrow E$，则 $(I - P_{n-1})P_n P$: $X \longrightarrow E_n$ 是一个投影，且

$$n \leqslant \lambda(E_n) \leqslant \|(I-P_{n-1})P_nP\| \leqslant 6\|P\|,$$

从而 $\|P\| = +\infty$，矛盾。证毕。

定理 1.1.1 的证明　只须证明必要性．由定理 1.1.4 知，此时 X 的有限维子空间是一致可补的，下面利用 Dvoretsky 定理（定理 1.1.2）证明这时有 $X \overset{\alpha^*}{<} H$，再应用定理 1.1.2，即得 $X \approx H$.

令 $\mathscr{L} = \{L; L$ 是 X 的有限维子空间$\}$，取 $L \in \mathscr{L}$，设 $\dim L = n$.

由于 $\dim L = n$，故 L 与 l_2^n 线性同胚，令

$$\alpha_L = \inf\{\|T^{-1}\|; T \text{ 是 } L \longrightarrow l_2^n \text{ 的线性同胚}\},$$

则存在线性同胚 $W: L \longrightarrow l_2^n$ 使 $\frac{1}{\alpha_L}\|x\| \leqslant \|Wx\| \leqslant \|x\|$，$\forall x \in L$.

为了证明 $X \overset{\alpha^*}{<} H$ 只须证明 $\sup\{\alpha_L; L \in \mathscr{L}\} = \alpha^* < +\infty$.

为了简化起见下面记 $\alpha_L = \alpha$.

由于 X 的有限维子空间是一致可补的，故存在 $\lambda > 1$，及投影 $Q: X \longrightarrow L$，使 $\|Q\| \leqslant \lambda$．又因 $(I-Q)X$ 是无限维的，由Dvoretsky 定理，存在 $Y \subset (I-Q)X$，$\dim Y = n$，及线性同胚 $U: Y \longrightarrow l_2^n$，使

$$\frac{1}{2}\|y\| \leqslant \|Uy\| \leqslant \|y\|, \forall y \in Y,$$

令 $T = \frac{1}{2}U^{-1}W: L \longrightarrow Y$，则

$$\frac{1}{2\alpha}\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \|x\|, \forall x \in L.$$

令 $D_a = \{x + aTx; x \in L\}$，再由一致可补性存在 $P_a: X \longrightarrow D_a$，使 $\|P_a\| \leqslant \lambda$（$a$ 为待定系数）.

令 $V = QP_aT$，我们有

$$(I-Q)P_a x = aT(I-aV)x, \forall x \in L. \tag{1.1}$$

事实上，若 $x \in L$，则 $P_a x = z + Tz$，对某个 $z \in L$，故

$$(I-Q)P_a x = z + aTz - Qz + aQTz = aTz,$$

又

$$x + aTx = P_a(x + aTx) = P_a x + aP_a Tx,$$

故

$$aP_a Tx = x + aTx - P_a x,$$

从而

$$\begin{aligned} aT(I - aV)x &= aTx - a^2 TQP_a Tx \\ &= aTx - aTQx + a^2 TQTx + aTQP_a x \\ &= aTQP_a x = aTQ(z + aTz) \\ &= aTQz = aTz = (I - Q)P_a x. \end{aligned}$$

即(1.1)成立。并且对 $x \in L$,

$$\begin{aligned} \|(I - Q)P_a x\| &= \|aT(I - aV)x\| \geqslant \frac{a}{2\alpha}\|x - aVx\| \\ &\geqslant \frac{a(\|x\| - a\|Vx\|)}{2\alpha} \geqslant \frac{a(\|x\| - a\lambda^2\|Tx\|)}{2\alpha} \end{aligned}$$

定义S_0: $L \longrightarrow (l_2^n \oplus l_2^n)_2$, $S_0 x = \left(\frac{1}{2}UTx, \frac{1}{4\lambda^2}U(I - Q)P_a x\right)$, $\forall x \in L$, 易见,对任 $x \in L$,

$$\max\left(\frac{1}{4}\|Tx\|, \frac{a}{16\alpha\lambda^2}(\|x\| - a\lambda^2\|Tx\|)\right) \leqslant \|S_0 x\| \leqslant \|x\|.$$

由于 T 是 1-1 算子,故 S_0 也是 1-1 算子,从而 $\dim S_0(L) = n$,因此 $S_0(L) = l_2^n$,由α的定义知,$\|S_0^{-1}\| \geqslant \alpha$,从而存在 $y_0 \in l_2^n$,使 $\|y_0\| = 1$,但 $\|S_0^{-1}y_0\| \geqslant \alpha$,令 $y_0 = S_0 x_0$,对某个 $x_0 \in L$. 则 $\|x_0\| \geqslant \alpha\|S_0 x_0\|$,令 $x_1 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$,则 $\|x_1\| = 1$,且 $\|S_0 x_1\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$。由此,即得 $\alpha \leqslant \max\left(\frac{32\alpha\lambda^2}{a}, 8a\lambda^2\right)$. 事实上,

如果 $a\lambda^2\|Tx_1\| < \frac{1}{2}$,则

$$\frac{1}{\alpha} \geqslant \|S_0 x_1\| \geqslant \frac{a}{16\alpha\lambda^2}(\|x_1\| - a\lambda^2\|Tx_1\|) \geqslant \frac{a}{32\alpha\lambda^2}.$$

如果 $a\lambda^2\|Tx_1\| \geqslant \frac{1}{2}$,则

$$\frac{1}{\alpha}\geqslant\|S_0x_1\|\geqslant\frac{1}{4}\|Tx_1\|\geqslant\frac{1}{8a\lambda^2}.$$

总之

$$\frac{1}{\alpha}\geqslant\min\left(\frac{a}{32\alpha\lambda^2},\ \frac{1}{8a\lambda^2}\right),$$

即

$$\alpha\leqslant\max\left(\frac{32\alpha\lambda^2}{a},\ 8a\lambda^2\right).$$

如果 $a>32\lambda^2$，则只可能 $\alpha\leqslant 8a\lambda^2$，因此，

$$\alpha<8\cdot 32\lambda^2(1+\delta)\lambda^2,\ \forall\delta>0,$$

从而 $\alpha\leqslant 256\lambda^4$。故 $\alpha^*\leqslant 256\lambda^4$，从而 $X\overset{\alpha*}{<}H$，因此 $X\approx H$。证毕。

很容易直接构造 l_1 的不可补子空间。首先，我们证明

定理 1.1.5 每个可分 Banach 空间 X 线性等距于 l_1 的某个商空间。

证明 证法一：取 $U(X)$ 中可数稠集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，令 $T: l_1\longrightarrow X$，$T(a_n)=\Sigma a_n x_n$，$\forall(a_n)\in l_1$，则 $\|T\|\leqslant 1$。

任取 $z\in X$，$\|z\|=1$，则对任 $\varepsilon>0$，存在 x_{n_1}，使 $\|z-x_{n_1}\|<\varepsilon$。假设 $n_1,\cdots n_j$ 已选好，使

$$\left\|z-x_{n_1}-\frac{\varepsilon}{2}x_{n_2}-\cdots-\frac{\varepsilon}{2^{j-1}}x_{n_j}\right\|<\frac{\varepsilon}{2^j},$$

则

$$\left\|\frac{2^j}{\varepsilon}\left(z-x_{n_1}-\cdots-\frac{\varepsilon}{2^{j-1}}x_{n_j}\right)\right\|<1$$

故存在 $x_{n_{j+1}}$，使

$$\left\|\frac{2^j}{\varepsilon}\left(z-x_{n_1}-\cdots-\frac{\varepsilon}{2^{j-1}}x_{n_j}\right)-x_{n_{j+1}}\right\|<\frac{1}{2},$$

从而

$$\left\|z-x_{n_1}-\cdots-\frac{\varepsilon}{2^j}x_{n_{j+1}}\right\|<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

这样就归纳选好了 (x_{n_j})。令

$$y = e_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2} e_{n_2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^i} e_{n_{i+1}} + \cdots,$$

则 $\|y\| < 1 + \varepsilon$, 且 $Ty = z$, 由此,得到 T 是满映象,令

$$\hat{T}: l_1/\mathrm{Ker}(T) \longrightarrow X$$

$\hat{T}(\Sigma a_i e_i + \mathrm{Ker}(T)) = \Sigma a_i x_i$,则 $\hat{T}$ 是 1-1, 且满的. $\|\hat{T}\| \leqslant 1$. 又由上面证明知,对任何 $z \in X$, $\|z\| = 1$, 任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in l_1$, 使 $\|y\| \leqslant 1 + \varepsilon$, $Ty = z$, 故 $\hat{T}([y]) = z$, 且 $\|[y]\| \leqslant 1$. 从而,

$$\|[y]\| \leqslant 1 = \|z\| = \|\hat{T}[y]\| \leqslant \|[y]\|,$$

即 $\|[y]\| = \|\hat{T}[y]\|$, 故 $\hat{T}$ 是线性等距. 因此, X 线性等距于 l_1 的某个商空间.

证法二: 令 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $S(X)$ 的可数稠集. 令 $T: l_1 \longrightarrow X$, $T(a_n) = \Sigma a_n x_n$, $\forall (a_n) \in l_1$, 则 $T \in L(l_1, X)$, 故 $T^* \in L(X^*, l_\infty)$, 且

$$\begin{aligned}\|T^* x^*\|_\infty &= \sup_n |T^* x^*(e_n)| = \sup_n |x^*(Te_n)| \\ &= \sup_n |x^*(x_n)| = \|x^*\|,\end{aligned}$$

其中 (e_n) 为 l_1 的自然基.

因此, T^* 是线性等距, 从而 T 是满映象. 令

$$\hat{T}: l_1/\mathrm{Ker}(T) \longrightarrow X, \quad \hat{T}(\Sigma a_i e_i + \mathrm{Ker}(T)) = \Sigma a_i x_i,$$

则 $\hat{T}$ 为 1-1 满映象,对任 $[y] \in l_1/\mathrm{Ker}(T)$,

$$\begin{aligned}\|[y]\| &= \sup\{|z^*([y])|; z^* \in (l_1/\mathrm{Ker}(T))^*, \|z^*\| \leqslant 1\} \\ &= \sup\{|w^*(w)|; w^* \in (\mathrm{Ker}(T))^\perp, \|w^*\| \leqslant 1, w \in [y]\} \\ &= \sup\{|T^* x^*(w)|; \|x^*\| \leqslant 1, w \in [y]\}\end{aligned}$$

(因 T^* 为等距, 故 $\mathscr{R}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$)

$$\begin{aligned}&= \sup\{|x^*(Tw)|; \|x^*\| \leqslant 1, w \in [y]\} \\ &= \sup\{|x^*(\hat{T}[y])|; \|x^*\| \leqslant 1\} = \|\hat{T}[y]\|.\end{aligned}$$

因此, $\hat{T}$ 为线性等距, 从而 X 线性等距于 l_1 的某个商空间. 证毕.

由定理 1.1.5 知, $l_2 \cong l_1/M$, 对某个子空间 $M \subset l_1$. M 不是

l_1 的可补子空间。事实上，否则，设 $l_1 = M \oplus Y$，对 l_1 的某个子空间 Y。从而 $l_2 \cong l_1/M \approx Y$，即 $l_2 \approx Y$，这是不可能的，因为 l_1 及其子空间中，序列 w 收敛和范数收敛是一致的，但 l_2 不具这个性质（取 l_2 的自然基 (e_n)，则 $e_n \xrightarrow{w} 0$，但 $\|e_n\| = 1$）。

定义 1.1.1 Banach 空间 X 称为 Schur 空间，如果任 $(x_n) \subset X$，$x_n \xrightarrow{w} x \in X$，则 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

显然，Schur 空间的子空间仍是 Schur 空间，Schur 空间的线性同胚象仍是 Schur 空间。容易证明 l_1 是 Schur 空间。仿照上面证明可知，每个可分无限维非 Schur 空间对应一个 l_1 的非可补子空间。

对 l_p，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$p \neq 2$，也可直接构造不可补子空间，请见参考书(B-1, p.130)。

另一方面我们有下面定理（注意在定理 1.1.4 的证明中已经使用这个事实）。

定理 1.1.6 任何 Banach 空间 X 的任何有限维子空间及有限补维子空间都是可补的。

证明 设 M 是 X 的有限维子空间，$\dim M = n$。由于任何 n 维 Banach 空间均线性同胚，特别 $M \approx l_\infty^n$，故存在 M 中 n 个线性无关向量 $(x_i)_{i=1}^n$，及常数 $C > 0$，使

$$C^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

令 $x_j^*\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = a_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 则 $(x_j^*)_{j=1}^n \subset M^*$，且 $\|x_j^*\| \leqslant C$，$j = 1, \cdots, n$。由 Hahn-Banach 定理，将 $(x_j^*)_{j=1}^n$ 保范延拓为 $(\tilde{x}_j^*)_{j=1}^n \subset X^*$，令 $Px = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^*(x) x_i$, $\forall x \in X$，易见，$\|P\| \leqslant nC^2$。且 P 是 X 到 M 上投影，故 M 在 X 中可补。

我们知道，X 的子空间 N 称为具有限补维，如果 $\dim X/N < +\infty$。选择 X 的线性子集 M，使 $M \cap N = \{0\}$，且对任 $x \in X$，

$x=u+v$, $u\in M$, $v\in N$。令 $Q: X\longrightarrow X/N$ 是商映象，则 $Q|_M$: $M\longrightarrow X/N$ 是 1-1 满的，由于 $\dim X/N<+\infty$，故 $\dim M=\dim X/N<+\infty$，因此 M 是闭的，即 M 是 X 的线性子空间。令 $P: X\longrightarrow N$, $P(u+v)=v$, $\forall x=u+v\in X$，则 P 是闭线性算子，事实上，若 $\lim\limits_n x_n=x\in X$, $\lim\limits_n P(x_n)=y\in X$，则 $y\in N$, $\lim\limits_n(x_n-P(x_n))=x-y\in M$（由于 M 是闭的），因此 $x=y+(x-y)$，故 $P(x)=P(y)=y$，即 P 是闭的，根据闭图象定理，P 是连续的。故 N 是可补的。证毕。

注　由 Auerbach 定理（引理4.2.2），对任何 n 维 Banach 空间 B_n，存在 $(x_i)_{i=1}^n\subset S(B_n)$, $(x_i^*)_{i=1}^n\subset S(B_n^*)$，使 $x_i^*(x_j)=\delta_{ij}$ $1\leqslant i, j\leqslant n$ ($\delta_{ij}=0$，当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=1$，当 $i=j$ 时)。由定理证明立即知 $\|P\|\leqslant n$。即对任何包含 n 维 Banach 空间 Bn 的Banach 空间 X，存在投影 $P: X\longrightarrow B_n$，使 $\|P\|\leqslant n$。最近，König & Tomczak-Jaegerman [K-TJ-1] 证明 $\|P\|\leqslant\sqrt{n}-\frac{c}{\sqrt{n}}$，其中 c 为不依赖于 n 的绝对常数。且这个估计是最佳的（当然对具体空间，例 l_p^n，可得具体的“投影常数”）。□

正如定理 1.1.1 证明中我们看到的，如果 Banach 空间 X 不线性同胚于 Hilbert 空间，那么我们不能期望 X 的有限维子空间是一致可补的。

Ando [A-1] 还证明 L_p, $1\leqslant p<+\infty$, $p\neq 2$，不存在 1 可补的补维为 1 的闭子空间。

§2　$l_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$　c_0 是素空间

由 §1 知道，除了 $p\neq 2$，l_p 都具有不可补子空间，本节我们将证明 $l_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$c_0$ 的每个（无限维）可补子空间都与整个空间线性同胚。这是一个很有趣的性质。为此我们引入如下定义。

定义 1.2.1 Banach 空间 X 称为素 (prime) 空间，如果 X 的每个无限维可补子空间都与 X 线性同胚。

$l_p(1\leqslant p<+\infty)$ 和 c_0 作为具基的 Banach 空间具有许多特殊的性质。

注　本节中叙述有关基方面的内容，不熟悉这一内容的基本知识的读者可参考附录 2。□

定理 1.2.1 令 $X=c_0$ 或 l_p，$1\leqslant p<+\infty$，令 $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ 是 X 的自然基 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 的正规化块基，则

(1) $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ 等价于 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$，且 $[u_j]_{j=1}^{\infty}\cong X$；

(2) $[u_j]_{j=1}^{\infty}$ 是 X 的 1 可补子空间。

证明　(1) ①　对 $X=c_0$ 情况：

设

$$u_j=\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}\lambda_i e_i,$$

且

$$\|u_j\|=\max\{|\lambda_i|; m_j+1\leqslant i\leqslant m_{j+1}\}=1,\ j\in N.$$

对任 $(a_j)\in c_0$，

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j u_j\right\|=\max_{1\leqslant j<+\infty}\{|a_j|\cdot\max(|\lambda_i|; m_j+1\leqslant i\leqslant m_{j+1})\}$$

$$=\max_{1\leqslant j<+\infty}|a_j|=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j e_j\right\| \qquad (1.2)$$

(1.2)表明 $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ 等价于 c_0 的自然基 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$，且 $[u_j]_{j=1}^{\infty}\cong c_0$（“等价”定义见附录 2）。

②　对 $X=l_p$，$1\leqslant p<+\infty$ 的情况。

设

$$u_j=\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}\lambda_i e_i.$$

且

$$\|u_j\|=\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}|\lambda_i|^p\right)^{1/p}=1,\ j\in N.$$

对任何 $(a_i)\in l_p$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_ju_j\right\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}|\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_je_j\right\|. \tag{1.3}$$

(1.3)表明 $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ 等价于 l_p 的自然基 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, 且 $[u_j]_{j=1}^{\infty}\cong l_p$.

(2) 对每个 j, 容易找到 $u_j^*\in[e_i]_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}\subset l_p^*$ (对 c_0, 考虑 $c_0^*\cong l_1$), 使 $\|u_j^*\|=u_j^*(u_j)=1$, 则 $u_j^*(u_k)=0$, $k\neq j$.

令 $Px=\sum_{j=1}^{\infty}u_j^*(x)u_j, \forall x\in X$, 则易见 $P^2=P$, 且 $PX=[u_j]_{j=1}^{\infty}$, 下面证明 $\|P\|=1$, 事实上, 只须证明 $\|P\|\leqslant1$ 即可. 因为在 Banach 空间中投影 P, 总有 $\|P\|=\|P^2\|\leqslant\|P\|^2$, 即 $\|P\|\geqslant1$.

① 若 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\in c_0$, 则

$$\|Px\|=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}u_j^*(x)u_j\right\|=\max_{1\leqslant j<+\infty}|u_j^*(x)|$$

$$=\max_{1\leqslant j<+\infty}\left|\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}a_iu_j^*(e_i)\right|\leqslant\max_{1\leqslant j<+\infty}\max_{m_j+1\leqslant i\leqslant m_{j+1}}|a_i|$$

$$=\max_{1\leqslant i<+\infty}|a_i|=\|x\|,$$

故 $\|P\|\leqslant1$, 故 P 为 X 到 $[u_j]_{j=1}^{\infty}$ 的范数为 1 的投影, 即 $[u_j]_{j=1}^{\infty}$ 在 c_0 中 1 可补。

② 若 $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\in l_p$, 则

$$|u_j^*(x)|\leqslant\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}|a_iu_j^*(e_i)|\leqslant\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}|u_j^*(e_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

从而

$$\|Px\|^p=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}u_j^*(x)u_j\right\|^p=\sum_{j=1}^{\infty}|u_j^*(x)|^p\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p=\|x\|^p,$$

即 $\|P\|\leqslant 1$，故 $[u_j]_{j=1}^{\infty}$ 在 l_p 中 1 可补。证毕。

定理 1.2.2 若 $X=c_0$ 或 l_p，$1\leqslant p<+\infty$，则 X 的每个无限维子空间 Y 都含有一个子空间 Z，使 $Z\approx X$，且 Z 在 X 中可补。

证明 由于 Y 是 X 的无限维子空间，X 具自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，故 Y 含有子列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|y_j-u_j\|}{\|u_j\|}<\frac{1}{8},$$

其中 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的块基(见附录 2 定理 2.8)。

因此，$\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\{e\}_{n=1}^{\infty}$ 的正规化块基，根据定理 1.2.1 $\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}\approx\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，且 $[u_n]_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中 1 可补，应用附录 2 定理 2.7 即知 $[y_n]_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中可补，且 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$。证毕。

定理 1.2.3 c_0、$l_p(1\leqslant p<+\infty)$ 中没有一个同胚于另一空间的子空间。

证明 首先容易看到，这些空间的自然基是互不等价的。设 X、Y 分别是 c_0、$l_p(1\leqslant p<+\infty)$ 中任何两个不同的空间，分别记 X、Y 的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{e_n'\}_{n=1}^{\infty}$，若存在 $T: X\longrightarrow Y$ 内线性同胚，则 $Te_n\xrightarrow{w}0$，由附录 2 定理 2.9 知 $\{Te_n\}$ 含子列$\{Te_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使 $\{Te_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\approx\{e_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 的块基，由定理 1.2.1 知$\{Te_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\approx\{e_n'\}_{n=1}^{\infty}$，从而 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{e_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}\approx\{Te_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}\approx\{e_n'\}_{n=1}^{\infty}$，矛盾。证毕。

为了证明 c_0、l_p $(1\leqslant p<+\infty)$ 是素空间，我们要用下列 Pelcznski 方法。

定理 1.2.4 设 X、Y、Z 是 Banach 空间，则

(1) $((X\oplus Y)\oplus Z)\approx(X\oplus(Y\oplus Z))$；

(2) $Y\approx Z\Longrightarrow X\oplus Y\approx X\oplus Z$;

(3) $((X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus X)_p\approx(X\oplus X\oplus\cdots)_p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$;

(4) $(\Sigma\oplus(X\oplus Y)_p)_p\longrightarrow((\Sigma\oplus X)_p\oplus(\Sigma\oplus Y)_p)_p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.

证明 (1) 令 $T:((X\oplus Y)\oplus Z)\longrightarrow(X(Y\oplus Z))$

$$T((x,y),z)=(x,(y,z)).$$

并注意到拓扑直和的性质：$(x_n,y_n)\longrightarrow(x,y)\Longleftrightarrow x_n\longrightarrow x$ 且 $y_n\longrightarrow y$，即可。

(2) 设 T_1: $Y\longrightarrow Z$ 的线性同胚，令

$T:(X\oplus Y)\longrightarrow(X\oplus Z)$，$T(x,y)=(x,T_1y)$.

(3) 令 $T:((X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus X)_p\longrightarrow(X\oplus X\oplus\cdots)_p$.

$$T((x_1,x_2,\cdots),x_0)=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$$

容易验证 T 是线性同胚。

(4) 令 $T:(\Sigma\oplus(X\oplus Y)_p)_p\longrightarrow((\Sigma\oplus X)_p\oplus(\Sigma\oplus Y)_p)_p$

$$T((x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots)=((x_1,x_2,\cdots),(y_1,y_2,\cdots)).$$

容易验证 T 是线性同胚，证毕。

注 对有限直和情况，易见

$$(X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n)\approx(X_1\oplus\cdots\oplus X_n)_p,\ \forall 1\leqslant p\leqslant+\infty.$$

（一切直和范数是等价的。）□

定理 1.2.5（Pelczynski 分解方法） 若 X、Y 是 Banach 空间，$X\overset{c}{\hookrightarrow}Y$ 且 $Y\overset{c}{\hookrightarrow}X$，且满足下列条件之一，

(1) $X\approx X\oplus X$, $Y\approx Y\oplus Y$;

(2) $X\approx(\Sigma\oplus X)_p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$;

(3) $X\approx(\Sigma\oplus X)_{c_0}$,

则 $X\approx Y$.

证明 (1) 由 $X\overset{c}{\hookrightarrow}Y$，故存在 Y 的子空间 Z，使 $Y\approx X\oplus Z$，从而由 $X\approx X\oplus X$ 知，

$$Y\approx X\oplus Z\approx X\oplus X\oplus Z\approx X\oplus Y.$$

同理 $X\approx Y\oplus X$，故 $X\approx Y\oplus X\approx X\oplus Y\approx Y$.

(2) $X\oplus X\approx(\Sigma\oplus X)_p\oplus(\Sigma\oplus X)_p\approx(\Sigma\oplus X)_p\approx X$,

又由 $Y\overset{c}{\hookrightarrow}X$，故存在 X 的子空间 W，使 $X\approx Y\oplus W$，故

$$X\approx(\Sigma\oplus X)_p\approx(\Sigma\oplus(Y\oplus W)_p)_p\approx((\Sigma\oplus Y)_p\oplus(\Sigma\oplus W)_p)_p$$
$$\approx Y\oplus((\Sigma\oplus Y)_p\oplus(\Sigma\oplus W)_p)_p\approx Y\oplus X,$$

因 $X\overset{c}{\hookrightarrow}Y$，$X\approx X\oplus X$，同(1)证明 $Y\approx X\oplus Y$，

故

$$X\approx Y\oplus X\approx X\oplus Y\approx Y.$$

证毕。

(3) 同(2)证明。

证毕。

注　一个重要的 open 问题是 $X\overset{c}{\hookrightarrow}Y$ 且 $Y\overset{c}{\hookrightarrow}X$ 是否 $X\approx Y$? 我们称一个 Banach 空间 X 为具 Schroeder-Bernstein 性质(SBP)，如果对任何 Banach 空间 Y，如果 $X\overset{c}{\hookrightarrow}Y$，$Y\overset{c}{\hookrightarrow}X$，则 $X\approx Y$。另一个重要 Open 问题是，是否每个 Banach 空间具 SBP?此外下列仍为 Open。

(1) X 具 SBP $\overset{?}{\Longrightarrow}$ X^* 具 SBP；

(2) X^* 具 SBP $\overset{?}{\Longrightarrow}$ X^* 具 SBP；

(3) X,Y 具 SBP $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $X\oplus Y$ 具 SBP。

详细讨论参见(C-2)。□

定理 1.2.6　c_0、$l_p(1\leqslant p<+\infty)$是素空间。

证明　令 $X=c_0$ 或 l_p，$1\leqslant p<+\infty$。

任取 X 的无限维可补子空间 Y，显然 $Y\overset{c}{\hookrightarrow}X$，由定理 1.2.2，存在 Y 的子空间 Z，使 $Z\approx X$，且 Z 在 X 中可补，从而更有 Z 在 Y 中可补，故 $X\overset{c}{\hookrightarrow}Y$。

另一方面，易见当 $X=c_0$ 或 l_p，$1\leqslant p<+\infty$ 时，有

$$(\Sigma\oplus X)_X\cong X,$$

故由 Pelcznski 分解定理(定理 1.2.5)，即得 $X\approx Y$。证毕。

注 1　应用 Pelczynski 分解方法，我们得到一个存在性证明，即知道存在 X 到它的无限维可补子空间上的一个线性同胚。

一般地要将T具体表达出来是困难的。但对 $l_p(1\leqslant p<+\infty,p\neq 2)$ 的 1 可补子空间，已可清楚表达出来，事实上有下面结果：设

$$X=l_p(1<p<+\infty,p\neq 2),$$

令 P 是 X 上范数为 1 的投影，则存在 X 中范数为 1 的向量列 $\{u_i\}_{i=1}^m$ (其中 $m=\dim PX$，它可以是有限的也可以是无限的)，

$$u_j=\sum_{i\in\sigma_j}\lambda_i e_i,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ \sigma_k\cap\sigma_j=\phi,\ k\neq j,$$

使 $Px=\sum_{j=1}^{m}u_j^*(x)u_j, \forall x\in X$，其中 $\{u_j^*\}_{j=1}^m\subset S(X^*)$，使$u_j^*(u_j)=1$，$1\leqslant j\leqslant m$，$PX=[u_j]_{j=1}^m\cong l_p^m$ (证明见参考书(L-T1，p.55，定理 2.a.4)□

注 2　定理 1.2.6 的证明依赖于 c_0 及 l_p $(1\leqslant p<+\infty)$ 的特殊的良好性质(即定理 1.2.2)，然而 Lindenstrauss成功地证明了 l_∞ 也是素空间，见下面定理。□

定理 1.2.7　l_∞是素空间

这个定理的证明依赖于下面的几个定理。

定理 1.2.8　设 K 是紧 Hausdorff 空间，$c_0\not\hookrightarrow X$，则

$$L(C(K),X)=WK(C(K),X).$$

这个定理的证明要用到向量测度的一系列定理，我们省略这个证明(参见参考书(D-U-1)p.160)。

定义 1.2.2　$T\in L(X,Y)$，如果 T 映 w 紧集为相对范紧集，则称 T 为 Dunford-Pettis 算子(DP 算子) 记全体 DP 算子为 $DP(X,Y)$，Banach 空间 X 称为 DP空间，如果 $WK(X,Y)\subset DP(X,Y)$，$\forall$ Banach 空间 Y.

定理 1.2.9　若 Banach 空间 X 是 DP 空间，则对任何 $T\in WK(X,X)$，有 $T^2\in K(X,X)$.

证明　由于 $T\in WK(X,X)$，故$\overline{TU(X)}$是 X 中 w 紧集，又由于 X 是 DP 空间，故 $T\in DP(X,X)$，从而 $T(\overline{TU(X)})$是 X中相对范紧集，又

$$T^2U(X)=T(TU(X))\subset T(\overline{TU(X)}),$$

故 $T^2\in K(X,X)$。证毕。

定理 1.2.10 若 K 是紧 Hausdorff 空间，则 $C(K)$ 是 DP 空间。

证明略(参见参考书(D-U-1) p.154)。

推论 1.2.11 若 K 是紧 Hausdorff 空间，$T\in WK(C(K),C(K))$，则 $T^2\in K(C(K),C(K))$。

证明 由定理 1.2.10 及定理 1.2.9。证毕。

引理 1.2.12 若 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset l_\infty$，$M$ 为常数，使

$$\sup_n|a_n|\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n\right\|\leqslant M\cdot\sup_n|a_n|,\quad \forall(a_n)\in c_0 \tag{1.4}$$

则存在 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使

$$\frac{1}{2}\sup_k|a_k|\leqslant\left\|w^*\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_k\right\|\leqslant M\sup_n|a_k|,\quad \forall(a_k)\in l_\infty \tag{1.5}$$

注：其中 $w^*\sum_{n=1}^{\infty}a_ky_k$ 表示 $\sum_{k=1}^{n}a_ky_k\xrightarrow{w^*}w^*\sum_{n=1}^{\infty}a_ky_k$。

证明 首先，对 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，由(1.4)，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|y_{n_k}(i)|\leqslant M,\forall i,$$

其中 $y_{n_k}=\{y_{n_k}(i)\}_{i=1}^{\infty}\in l_\infty$。

故对任何 $(a_k)_{k=1}^{\infty}\in c_0$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_{n_k}(i)<+\infty,\ \forall i. \tag{1.6}$$

由 $l_1^*\cong l_\infty$，及 l_1 具自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，故(1.6)表明，

$$w^*\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{l}a_ky_{n_k}$$

存在，记为 $w^*\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_{n_k}$，且

$$\left\|w^*\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_{n_k}\right\|\leqslant\lim_l\left\|\sum_{k=1}^{l}a_ky_k\right\|\leqslant M\lim_l\sup_{1\leqslant k\leqslant l}|a_k|$$

$$= M \sup_n |a_n|.$$

这表明(1.5)式右边不等式对 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子列成立，下面适当选择 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足(1.5)左边不等式。

对每个 $x \in l_\infty$, $\varepsilon > 0$, 记 $N(x, \varepsilon) = \{i; |x(i)| < \varepsilon\}$，其中 $x = (x(i))_{i=1}^{\infty}$。下面分几步进行。

(*a*) 我们有对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 使得有无限多个 n 满足

$$\|y_n \cdot \chi_{N(y_{n_0}, \varepsilon)}\| > 1, \tag{1.7}$$

其中 $\chi_{N(y_{n_0}, \varepsilon)}$ 表示特征函数。

事实上，首先若 $r > \dfrac{M}{\varepsilon}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{r} N(y_n, \varepsilon) = N$(若不然，则有

$i_0 \in N \setminus \bigcup_{n=1}^{r} N(y_n, \varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{r} (N \setminus N(y_n, \varepsilon))$, 故

$$|y_n(i_0)| > \varepsilon, \quad 1 \leqslant n \leqslant r,$$

从而

$$M < \varepsilon r < \sum_{n=1}^{r} |y_n(i_0)| \leqslant M$$

矛盾!)。因此，可选 n_0、$1 \leqslant n_0 \leqslant r$, 使有无限多个 n, 满足

$$\|y_n \cdot \chi_{N(y_{n_0}, \varepsilon)}\| \geqslant 1.$$

(否则，存在 n, 当 $n > n_1$ 时，$\|y_n \chi_{N(y_1, \varepsilon)}\| < 1$, 同样，存在 $n_2 > n_1$, 使得当 $n > n_2$ 时，$\|y_n \cdot \chi_{N(y_i, \varepsilon)}\| < 1$, $i = 1, 2$. 继续这个过程，存在 n_r, 使 $n_r > n_{r-1} > \cdots > n_1$, 且当 $n > n_r$ 时有

$$\|y_n \cdot \chi_{N(y_i, \varepsilon)}\| < 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \tag{1.8}$$

但 $\bigcup_{n=1}^{r} N(y_n, \varepsilon) = N$, 故由(1.8)知，当 $n > n_r$ 时，$\|y_n\| < 1$, 另一方面，由(1.4)知，$\|y_n\| \geqslant 1$, $\forall n$, 矛盾!)这表明(1.7)成立。

(*b*) 由(*a*)选 n_1 及 N 的无限子集 N_1, 使

$$\|y_n \cdot \chi_N(y_{n_1}, \tfrac{1}{8})\| \geqslant 1, \ \forall n \in N_1, \tag{1.9}$$

由(1.4), $\|y_{n_1}\| \geqslant 1$, 故可选 i_1, 使

$$|y_{n_1}(i_1)| \geqslant \frac{3}{4}.$$

因为 $\sum\limits_{n\in N}|y_n(i_1)|\leqslant M$，故，如果必要转到 N_1 的子列，可假设

$$\sum_{n\in N_1}|y_n(i_1)|<\frac{1}{8}.$$

考虑 $(y_n\chi_{N\left(y_{n_1},\frac{1}{8}\right)})_{n=1}^{\infty}$，同上讨论，可选 $n_2\in N_1$ 及 N_1 的无限子集 N_2，使

$$\|y_n\chi_{N\left(y_{n_1},\frac{1}{8}\right)}\chi_{N\left(y_{n_2},\frac{1}{8^2}\right)}\|\geqslant 1,\ \forall n\in N_2.$$

由于 $\|y_{n_2}\chi_{N\left(y_{n_1},\frac{1}{8}\right)}\|\geqslant 1$，故可选

$$i_2\in N\left(y_{n_1},\ \frac{1}{8}\right),$$

使

$$|y_{n_2}(i_2)|>\frac{3}{4}.$$

且如果必要转到 N_2 子列，不妨设 $\sum\limits_{n\in N_2}|y_n(i_2)|<\frac{1}{8^2}$.

继续这个归纳构造，得正整数的子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$|y_{n_k}(i_k)|>\frac{3}{4},$$

且对每个 k，

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}|y_{n_j}(i_k)|\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\cdots=\frac{1}{7}.$$

(c) $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 就是使(1.5)式左边不等式成立的子列。事实上，若 $\sup\limits_k|a_k|=1$，选 k_0，使

$$|a_{k_0}|>\frac{9}{10},$$

则

$$\left\|w^*\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_{n_k}\right\|\geqslant\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_ky_{n_k}(i_{k_0})\right|\geqslant|a_{k_0}|\cdot|y_{n_{k_0}}(i_{k_0})|-\sum_{k\neq k_0}|y_{n_k}(i_{k_0})|$$

$$\geqslant\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{7}>\frac{1}{2}.$$

证毕

定理 1.2.7 的证明　令 Y 是 l_∞ 的无限维可补子空间。由 Pelczynski 分解方法知，只须证明 $l_\infty \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ 即可，但我们知道 $l_\infty \hookrightarrow Y \Longrightarrow l_\infty \overset{c}{\hookrightarrow} Y$，故只须证 $l_\infty \hookrightarrow Y$ 即可。($l_\infty \hookrightarrow Y \Longrightarrow l_\infty \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ 的证明：设 $Z \subset Y$，T：$Z \longrightarrow l_\infty$ 是线性同胚，则 $Tz(i) \in Z^*$，由 Hahn-Banach 延拓定理，可保范延拓 $Tz(i)$ 为 Y^* 中元，记为 y_i^*，令

$$\hat{T}y = (y_i^*(y))_{i=1}^{\infty},$$

则易见 $P = T^{-1}\hat{T}$ 即为 Y 到 Z 上的投影，故 $l_\infty \overset{c}{\hookrightarrow} Y$。这个证明也表明 l_∞ 具 $\mathscr{P}_1$ 性质(见定理 6.1.1 注)，且对任何 $\mathscr{P}_1$ 空间 X 及任 Y，均有 $X \hookrightarrow Y \Longrightarrow X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$)。

由于 l_∞ 是一个 $C(K)$ 空间(其中 K 是正整数的 Stone-Cěch 紧化)，令 P:$l_\infty \longrightarrow Y$ 是一个投影，故 $P^2 = P$，由于 Y 是无限维的，故 $P \notin K(l_\infty, l_\infty)$，由推论 1.2.11，知 $P \notin WK(l_\infty, l_\infty)$。再应用定理 1.2.8，知 $c_0 \hookrightarrow Y$，故存在 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$，及 $M>0$，使

$$\sup_n |a_n| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leqslant M \sup_n |a_n|, \quad \forall (a_n) \in c_0.$$

应用引理 1.2.12，不妨设 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 还满足

$$\frac{1}{2} \sup_n |a_n| \leqslant \left\| w^* \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leqslant M \sup_n |a_n|, \quad \forall (a_n) \in l_\infty. \tag{1.10}$$

对自然数 N 的每个无限子集 N_0，令 X_{N_0} 是 l_∞ 的如下子空间：

$$X_{N_0} = \left\{ w^* \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n;\ (a_n) \in l_\infty,\ \text{且当 } n \notin N_0 \text{ 时，} a_n = 0 \right\}.$$

令 $(N_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ 是 N 的无限子集的不可数族，使 $N_{\gamma_1} \cap N_{\gamma_2}$ 是有限的，对 $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (将每个实数 t 与收敛于 t 的一个有理点列建立 1-1 对应，即可知 $(N_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ 的存在)。

由 (1.10) 知，$X_{N_\gamma} \approx l_\infty$，下面的目的是证明必存在某个 $\gamma_0 \in \Gamma$，使 $X_{N_{\gamma_0}} \subset Y$。

若不然，则对每个 $\gamma \in \Gamma$，$X_{N_\gamma} \not\subset Y$。

令 $Q: l_\infty \longrightarrow l_\infty/Y$ 是商映象。则对每个 $\gamma\in\Gamma$，存在 $x_\gamma\in X_{N_\gamma}$，$\|x_\gamma\|=1$，且 $Qx_\gamma\neq 0$。设

$$x_\gamma = w^*\sum_{i\in N_\gamma} a_i^\gamma y_i,$$

则

$$\sup_{i\in N_\gamma}|a_i^\gamma|\leqslant 2.$$

任取 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n\in\Gamma$，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i Qx_{\gamma_i}\right\|\leqslant 2M.$$

其中 $\varepsilon_i=\pm 1, i=1,\cdots,n$（因 $N_{\gamma_i}\cap N_{\gamma_j}$ 有限，故在计算 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i Qx_{\gamma_i}$ 的范数时，可去掉关于 y_i 的“坐标”的重复部分，应用

$$\left\|w^*\sum_{i=1}^{\infty}a_i y_i\right\|\leqslant M\sup_i|a_i|,$$

即知）。

从而，对每个 $\varphi\in(l_\infty/Y)^*$ 及 $\varepsilon>0$，只有有限多个 $\gamma\in\Gamma$，使 $|\varphi(Qx_\gamma)|>\varepsilon$，因而对每个 $\varphi\in(l_\infty/Y)^*$，仅有可数个 γ，使 $\varphi(Qx_\gamma)\neq 0$。

但另一方面，Y 在 l_∞ 中可补，故 $l_\infty=Y\oplus Z$，对某个 $Z\in l_\infty$，从而 $l_\infty/Y\approx Z$，因为 l_∞ 具可数 total 集（即存在 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset l_\infty^*$，使得若 $x\in l_\infty$，$x_n^*(x)=0,\forall n$，则 $x=0$），从而 Z 也具可数 total 集，故 l_∞/Y 也具可数 total 集 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$。由上面证明知，每个 φ_i，仅有可数个 x_γ，使 $\varphi_i(Qx_\gamma)\neq 0$，因而至少存在 $\gamma_0\in\Gamma$，使 $\varphi_i(Qx_{\gamma_0})=0$，$\forall i$，由 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的 total 性知，$Qx_{\gamma_0}=0$，这与选取 x_{γ_0} 使 $Qx_{\gamma_0}\neq 0$ 矛盾！证毕。

注 至今仅有的已知的 prime 空间是 c_0，l_p，$1\leqslant p\leqslant+\infty$。是否存在其他的 prime 空间是重要的 open 问题。特别是是否存在 Orlicz 空间是 prime 空间？这是一个有趣的问题（参见参考书（L-T，1））。

已经证明，如果 Banach 空间 X 是 prime，且直到置换意义

下具唯一的无条件基，则 X 或$\approx l_1$，或 $\approx l_2$，或$\approx c_0$。(B-C-L-T1)。

如果放松一点，可考虑下列空间类。

定义 1.2.3 一个 Banach 空间 X 称为准素 (primary) 空间，如果 X 上每个投影 P，或者 $PX\approx X$ 或者$(I-P)X\approx X$。

显然，prime 空间是 primary 空间。

已经证明下列空间是 primary：

(1) $L_p[0,1]$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$(参见参考书(L-T Ⅱ. p.168)；

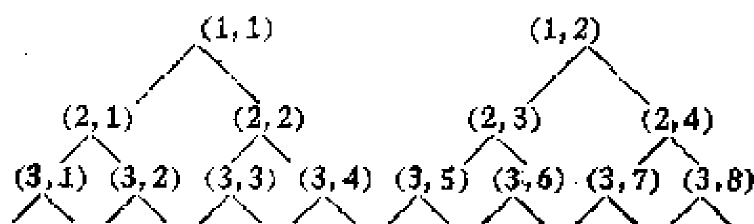
(2) $C(K)$，K 是紧度量空间(参考书(L-T Ⅱ p.168))；

(3) James 空间 J：

$$J=\left\{x=(a_n)_{n=1}^{\infty},\ \|x\|=\sup_{p_1<\cdots<p_m}\frac{1}{\sqrt{2}}[(a_{p_1}-a_{p_2})^2+(a_{p_2}-a_{p_3})^2+\cdots+(a_{p_m}-a_{p_1})^2]^{1/2}<+\infty,\ \text{其中}\ p_1,\cdots p_m\ \text{为自然数增加列},\ \lim_n a_n=0\right\}$$

(见 C-1)；

(4) James 树空间 JT。



JT 空间构造如下：令 T 是 $N\times N$ 的一个子集(也称一个标准树)，$T=\{(n,i),n=1,2,\cdots,1\leqslant i\leqslant 2^n\}$ (见图)。在 T 中引入如下偏序：$(n,i)\leqslant(m,j)$，当且仅当 $n\leqslant m$ 且存在正整数 $i=i_n$，$i_{n+1},\cdots,i_m=j$，使 $i_l\in\{2i_{l-1}-1,\ 2i_{l-1}\}$，$l=n+1,\cdots,m$ (即 i_l 或者等于$2i_{l-1}-1$ 或者等于 $2i_{l-1}$)。

T 中的一个线段是如下形式的集：

$$\{(n,i_n),(n+1,i_{n+1}),\cdots,(n+k,i_{n+k})\},$$

其中

$$i_l \in \{2i_{l-1}-1, 2i_{l-1}\}, l = n+1, \cdots, n+k$$
$$(n = 1, 2, \cdots, k = 0, 1, 2, \cdots).$$

对每个 $n \in N$，点(n,i) $(1 \leqslant i \leqslant 2^n)$称为 T 的第 n 阶枝点。T 的 n 阶枝是如下形式的集：

$$\{(n, i_n), (n+1, i_{n+1}), \cdots\},$$

其中 $i_l \in \{2i_{l-1}-1, 2i_{l-1}\}, l = n+1, n+2, \cdots$.
1 阶枝简称 1 枝。

$$JT = \{x = (x(n,i)); \|x\| = \sup\Big(\sum_{j=1}^{k} (\sum_{(n,i)\in S_j} x(n,i)^2\Big)^{1/2} < +\infty$$

其中上确界取自一切k及一切两两不相交的线段 $S_1, \cdots, S_k\}$ (见(Ar-1)，关于 JT 空间详细叙述可见参考书(D-D1))。

(5) Unirersal 空间 U_1

令 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 中一个稠集。

$$U_1 = \Big\{\{ = (a_n)_{n=1}^{\infty}, \ |||x|||_1 = \sup\Big\{\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n u_n\Big\|; \theta_n = \pm 1, \ \forall n\Big\}$$
$$< +\infty\Big\}$$

(参考书(L-T-1)p.131)。

另一方面也证明Tsirelson空间(见第六章§5)不是primary (C-S-1)。

但从整体看，关于 prime 空间及 primary 空间目前了解很少，这方面的一个有趣的 Open 问题之一是由 Cassaza-B.L.Lin 的一个定理引起的(有关对称基及次对称基见附录 2)。

定理 1.2.13 若 X 是具次对称基的 Banach 空间，则对 X 上的任何投影 Q，或者存在 $M \subset QX$，使$M \approx X$，且M在X 中可补，或者存在 $N \subset (I-Q)X$，使 $N \approx X$，且 N 在 X 中可补。

证明 由于所讨论的性质是在等价范数下不变的，且任何具次对称基的 Banach 空间可以再赋范，使在新范数下，次对称基常数为 1。故不妨假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banch 空间 X 的具次对称基常数为 1 的正规化次对称基，分两种情况讨论。

（Ⅰ）若 $x_n \overset{w}{\nrightarrow} 0$，则存在 $x^* \in S(X^*)$，$\varepsilon>0$，及 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，使 $x^*(x_{n_j})>\varepsilon$。故对任意正数列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_{n_j}\right\| \geqslant x^*\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{n_j}\right) \geqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{m} a_j.$$

注意到 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 也是无条件的，故对任何 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$（应用附录定理 2.12)，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_{n_j}\right\| \geqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{m} |a_j|,$$

这表明 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \approx \{e_n\}_{l_1}$，由次对称性

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \approx \{e_n\}_{l_1},$$

故 $X \approx l_1$。由定理 1.2.6，l_1 是 prime 空间，易见结论成立。

（Ⅱ）若 $x_n \xrightarrow{w} 0$，令

$$Qx_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} x_k,$$

则 $Qx_n \xrightarrow{w} 0$，

选 N 的无限子集 N_1，使得当 $n \in N_1$ 时，或

$$|\lambda_{nn}| \geqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } |\lambda_{nn}-1| \geqslant \frac{1}{2}.$$

我们不妨假设当 $n \in N_1$ 时，$|\lambda_{nn}| \geqslant \frac{1}{2}$（对 $|\lambda_{nn}-1| \geqslant \frac{1}{2}$ 考虑 $I-Q$ 即可）

因 $Qx_n \xrightarrow{w} 0$，由基序列选择原理（附录 2 定理 2.9)，存在 N_1 的无限子集 $N_2=\{n_1<n_2<\cdots\}$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的块基 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$，使

$$\|Qx_{n_j}-u_j\| < \frac{1}{16 \cdot 2^{j+3}\|Q\|},$$

且存在线性同胚 $T: [Qx_{n_j}]_{j=1}^{\infty} \longrightarrow [u_j]_{j=1}^{\infty}$，使

$$TQx_{n_j}=u_j, \ \forall j, \ \|T\|<2,$$

其中

$$u_j = \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \lambda_{kn_j} x_k, \ \forall j,$$

故

$$\|u_j\| \geqslant |x^*_{n_j}(u_j)| = |\lambda_{n_j n_j}| \geqslant \frac{1}{2}, \forall j.$$

我们还有 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \approx \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$，事实上，若

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{nj} < +\infty,$$

由 Q 的有界性知，

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j Q x_{n_j} < +\infty,$$

由

$$\{Qx_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \approx \{u_j\}_{j=1}^{\infty},$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j < +\infty,$$

反之若

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j < +\infty,$$

由于 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是无条件的，故

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_{n_j n_j} x_{n_j} < +\infty,$$

又因

$$|a_j| = \left|\frac{1}{\lambda_{n_j n_j}}\right| |a_j \lambda_{n_j n_j}| \leqslant 2 |a_j \lambda_{n_j n_j}|,$$

再由 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 是无条件的知，$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n_j} < +\infty$，故

$$\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \approx \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty},$$

因 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是次对称的，故

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \approx \{u_j\}_{j=1}^{\infty},$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{Qx_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$，故

$$M=[Qx_{n_j}]_{j=1}^{\infty}\approx X,\ M\subset QX.$$

下面证明 M 在 X 中可补。

容易看到(见附录 2 定理 2.7) 只要证明存在投影

$$P:\ X\longrightarrow[u_j]_{j=1}^{\infty},\ 且$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|Qx_{n_j}-u_j\|}{\|u_j\|}\leqslant\frac{1}{8\|P\|},$$

即可。

令 $P:X\longrightarrow X$,

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^{*}(u_j)}u_j.$$

则 P 即所求。事实上，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n<+\infty,$$

由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件的，故

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{n_j}x_{n_j}<+\infty,$$

且

$$\left|\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^{*}(u_j)}\right|\leqslant2|a_{n_j}|,$$

再由 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 是无条件的，知

$$\sum\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^{*}(u_j)}x_{n_j}<+\infty,$$

因 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}\approx\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$，故

$$\sum\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^{*}(u_j)}x_{n_j}<+\infty.$$

从而 P 是有意义的，且

$$P(u_j)=P\left(\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\lambda_{kn_j}x_k\right)=\frac{\lambda_{n_jn_j}}{x_{n_j}^*(u_j)}u_j=u_j,$$

$$\left\|P\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right)\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^*(u_j)}u_j\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^*(u_j)}TQx_{n_j}\right\|$$

$$\leqslant\|T\|\cdot\|Q\|\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{n_j}}{x_{n_j}^*(u_j)}x_{n_j}\right\|2\|Q\|2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_{n_j}x_{n_j}\right\|$$

$$\leqslant 8\|Q\|\|x\|.$$

故 $\|P\|\leqslant 8\|Q\|$. 从而

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n,\quad\forall\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n\in[u_n]_{n=1}^{\infty}.$$

且

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_{n_j}^*(u_j)x_{n_j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}a_ju_j,$$

故 P 是 $X\longrightarrow[u_n]_{n=1}^{\infty}$ 上的投影, $\|P\|\leqslant 8\|Q\|$, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|Qx_{n_j}-u_j\|}{\|u_j\|}\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\|Qx_{n_j}-u_j\|\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{16\cdot 2^{j+3}\|Q\|}$$

$$\leqslant\frac{1}{8\|Q\|}\cdot\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8\|P\|}.$$

证毕.

这个定理促使人们猜想：是否具次对称基的 Banach 空间一定是 primary 空间?目前,这仍然是一个 Open 问题,甚至人们还不知道是否具对称基的 Banach 空间一定是 primary 空间.

§3 $L_p[0,1]$ 的子空间

$L_p[0,1]$, $1\leqslant p<+\infty$, 的 Haar 组是 $L_p[0,1]$ 的重要的基.

定义 1.3.1 下列函数列 $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 Haar 组,

$h_1(t)\equiv 1$, 对 $k=0,1,2,\cdots,s=1,2,\cdots,2^k$.

$$h_{2^k+s}(t)=\begin{cases}1 & \text{当 } t\in[(2s-2)2^{-k-1},\ (2s-1)2^{-k-1}] \\ -1 & \text{当 } t\in[(2s-1)2^{-k-1},\ 2s\cdot 2^{-k-1}] \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

定理 1.3.1 Haar 组（按上述给定的顺序）是 $L_p[0,1]$ 的单调基，$1\leqslant p<+\infty$。

证明 由于 Haar 组的线性张包含一切二进区间（即形如 $[s2^{-k},(s+1)2^{-k}]$）的特征函数，故 $L_p[0,1]=[h_n(t)]_{n=1}^{\infty}$。

对任何数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，正整数 n，令

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}a_ih_i(t),\quad g(t)=\sum_{i=1}^{n+1}a_ih_i(t),$$

则 f、g 的差别仅仅在某个二进区间 I 上：f 在 I 上取常数，例如记为 b，而 g 在 I 的前半区间上取值为 $b+a_{n+1}$，在 I 的后半区间上取值为 $b-a_{n+1}$，由于对每个 $1\leqslant p<+\infty$，

$$2|b|^p\leqslant|b+a_{n+1}|^p+|b-a_{n+1}|^p,$$

故易见 $\|f\|_p\leqslant\|g\|_p$，即

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ih_i(t)\right\|_p\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n+1}a_ih_i(t)\right\|_p.$$

故容易知道（见附录 2 定理 2.2），注 $\{h_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $L_p[0,1]$ 的单调基。证毕。

注 1 显然

$$\|h_{2^k+s}(t)\|_p=2^{-\frac{k}{p}},\ k=0,1,2,\cdots,\leqslant\cdots\leqslant2^k,\ 1\leqslant p<+\infty,$$

故 $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 并不是正规化基。□

注 2 将 Haar 函数组中的函数积分，即

令 $$\varphi_1(t)=1,\ \varphi_n(t)=\int_0^t h_{n-1}(u)du,\ n>1$$

得到函数列 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$，称 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Schauder 组，Schauder 组是 $C[0,1]$ 的单调基。事实上，span $(\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty})$ 是 $[0,1]$ 上一切连续的逐段线性函数，它的结点是二进点，从而

$$[\varphi_n(t)]_{n=1}^{\infty}=C[0,1].$$

并且由于对每个正整数 n，在 $\varphi_{n+1}(t)$ 不是0的区间上，$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ 均是线性函数，故对任何 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，任何 n，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(t)\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\varphi_i(t)\right\|,$$

从而易见（附录2定理2.2注）$\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 的单调基。□

Rademacher 函数组也是一个重要函数组。

定义 1.3.2 下列函数组 $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 Rademacher（函数）组，$\gamma_n(t)=\mathrm{sgn}\sin 2^n\pi t$，$t\in[0,1]$，$n\in N$。

注 易见，对任 $n\in N$

$$\gamma_n(t)=\begin{cases}1, t\in\left(\dfrac{2s-2}{2^n}, \dfrac{2s-1}{2^n}\right), & 1\leqslant s\leqslant 2^n.\\ -1, t\in\left(\dfrac{2s-1}{2^n}, \dfrac{2s}{2^n}\right), & 1\leqslant s\leqslant 2^n\\ 0, 其它.\end{cases}$$

命题 1.3.2 (1) 对 $n\geqslant 2$，

$$\gamma_n(t)=\begin{cases}\gamma_{n-1}(2t) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}\\ \gamma_{n-1}(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

(2) 设 $1\leqslant n_1\leqslant n_2<\cdots<n_s$，$k_1,\cdots,k_s$ 是正整数，则

$$\int_0^1 \gamma_{n_1}^{k_1}(t)\cdots\gamma_{n_s}^{k_s}(t)dt=\begin{cases}1, & k_1,\cdots k_s 皆为偶数\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

证明 (1) 当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$\gamma_{n-1}(2t)=\mathrm{sgn}\sin 2^{n-1}\pi 2t=\mathrm{sgn}\sin 2^n\pi t=\gamma_n(t);$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\gamma_{n-1}(2t)&=\mathrm{sgn}\sin 2^{n-1}\pi(2t-1)=\mathrm{sgn}\sin 2^{n-1}\pi 2t\\ &=\mathrm{sgn}\sin 2^n\pi t=\gamma_n(t).\end{aligned}$$

证毕。

(2) 因 $\gamma_{n_i}^2(t) \overset{a.e}{=} 1$，故只须讨论 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 1$ 情况。

函数 $\gamma_{n_1}(t)\cdots\gamma_{n_{s-1}}(t)$ 有 $2^{n_{s-1}}$ 个取常值的区间，这些区间之併为 [0，1]（除有限个点忽略不计）。每个这样的区间被分成 $2^{n_s - n_{s-1}}$ 个相等的子区间，其长度为 $\frac{1}{2^{n_s}}$，在这些子区间，例记为 I，内部 $\gamma_{n_s}(t)$ 交替取 1 和 -1。因此

$$\int_I \gamma_{n_s}(t)\,dt = 0,$$

从而

$$\int_0^1 \gamma_{n_1}(t)\cdots\gamma_{n_s}(t)\,dt = 0.$$

证毕。

下面证明一个重要的经常使用的不等式——Khintchine（辛钦）不等式。

定理 1.3.3 令 $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是[0,1]上的 Rademacher 函数，对 $1 \leqslant p < +\infty$，存在 A_p、B_p，使得对任何 m，任何 $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ 有

$$A_p\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\gamma_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leqslant B_p\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{1/2}.$$

证明　记 $f(t) = \sum_{n=1}^{m} a_n\gamma_n(t)$。

当 $p=2$ 时，由命题 1.3.2(2) 知，$\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L_2[0,1]$ 中正交且范数等于 1，故

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

显然，可取 $A_2 = B_2 = 1$。

当 $p > 2$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

故 $A_p=1$，选正整数 k，使 $2k>p$，则

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^{2k} dt\right)^{\frac{1}{2k}}. \tag{1.11}$$

由于

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^m a_n \gamma_n(t)\right)^{2k} dt$$

$$= \sum \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!} a_{n_1}^{\alpha_1}\cdots a_{n_s}^{\alpha_s} \int_0^1 \gamma_{n_1}^{\alpha_1}(t)\cdots\gamma_{n_s}^{\alpha_s}(t)\,dt,$$

其中和式对 1 和 m 之间所有正整数 $n_1,\cdots n_s$ 及满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_s=2k$ 的一切正整数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 取。

由命题 1.3.2(2) 知

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^m a_n \gamma_n(t)\right)^{2k} dt = \sum \frac{(2k_1+\cdots+2k_s)!}{(2k_1)!\cdots(2k_s)!} a_{n_1}^{2k_1}\cdots a_{n_s}^{2k_s}, \tag{1.12}$$

其中和式对满足 $k_1+\cdots+k_s=k$ 的一切正整数 $k_1,\cdots k_s$，及 1 和 m 之间所有正整数 $n_1,\cdots n_s$ 取。

另一方面，

$$\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^k = \sum \frac{(k_1+\cdots+k_s)!}{k_1!\cdots k_s!} a_{n_1}^{2k_1}\cdots a_{n_s}^{2k_s}.$$

故

$$\sum \frac{(2k_1+\cdots+2k_s)!}{(2k_1)\cdots(2k_s)!} a_{n_1}^{2k_1}\cdots a_{n_s}^{2k_s}$$

$$= \sum \frac{(k_1+\cdots+k_s)!}{k_1!\cdots k_s!} \left(\frac{(2k_1+\cdots 2k_s)!\,k_1!\cdots k_s!}{(k_1+\cdots+k_s)!\,(2k_1)!\cdots(2k_s)!}\right) a_{n_1}^{2k_1}\cdots a_{n_s}^{2k_s}$$

$$\leqslant C_{2k} \sum \frac{(k_1+\cdots+k_s)!}{k_1!\cdots k_s!} a_{n_1}^{2k_1}\cdots a_{n_s}^{2k_s} = C_{2k}\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^k$$

$$= C_{2k}\left(\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^{1/2}\right)^{2k} \tag{1.13}$$

其中

$$C_{2k} = \max\left(\frac{(2k_1+\cdots+2k_s)!\,k_1!\cdots k_s!}{(k_1+\cdots+k_s)!\,(2k_1)!\cdots(2k_s)!}\right)$$

$$\leqslant \frac{(2k)(2k-1)\cdots(k+1)}{2^k} \leqslant k^k,$$

由(1.11)、(1.12)及(1.13)，对 $p>2, 2k>p$，有

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant k^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^{1/2},$$

其可选 $B_p = k^{\frac{1}{2}}$。

对 $1 \leqslant p < 2$，因 $1 < \frac{2}{p}$，故

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\left(\int_0^1 |f(t)|^{p\cdot\frac{2}{p}} dt\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

故此时，$A_p = 1$。

又因为

$$\left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |f(t)|^{\frac{2}{3}} |f(t)|^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^{\frac{1}{3}} \left(B_4^4 \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot 4}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^{\frac{1}{3}} B_4^{\frac{2}{3}} \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{3}},$$

从而，

$$\left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B_4^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^{\frac{1}{3}},$$

故

$$\left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B_4^2 \int_0^1 |f(t)| dt,$$

因此，

$$B_4^{-2}\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\int_0^1|f(t)|dt\leqslant\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\gamma_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

故此时取

$$A_p=B_4^{-2}\approx\frac{1}{2}.$$

证毕。

推论 1.3.4 $l_2\subset\rightarrow L_p[0,1]$，$1\leqslant p<+\infty$。

推论 1.3.5 $l_p\not\approx L_p[0,1]$，$1\leqslant p<+\infty$，$p\neq2$。

证明 若 $l_p\approx L_p[0,1]$，由推论 1.3.4，$l_2\subset\rightarrow l_p$，$1\leqslant p<+\infty$，$p\neq2$，但由定理 1.2.3 知，这是不可能的。证毕。

注 由推论 1.3.4 知 $l_2\subset\rightarrow L_p[0,1]$，$1\leqslant p<+\infty$，我们进一步有 $l_2\subset\xrightarrow{C}L_p[0,1]$，$1<p<+\infty$，这由下面更深刻的定理得到。□

记 R_p 为 $\mathrm{span}\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L_p[0,1]$ 中的闭包，我们有

定理 1.3.6 R_p 是 $L_p[0,1]$ 的可补子空间，$1<p<+\infty$。

证明 分两种情况：(1) $p\geqslant2$。对任 $f\in L_p$，令

$$a_n=\int_0^1 f(t)\gamma_n(t)dt,\quad n\geqslant1.$$

$$Pf=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t),$$

显然 $f\in L_2$，故由于 $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 L_2 中规格化正交组，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<+\infty.$$

因此，根据 Khintchine 不等式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t)$在$L_p$中收敛，且

$$\|Pf\|_p=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t)\right\|_p\leqslant B_p\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}=B_p\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t)\right\|_2$$
$$\leqslant B_p\|f\|_2\leqslant B_p\|f\|_p,$$

因此，$P\in L(L_p,L_p)$。若 $f\in R_p$，由于从 Khintchine 不等式知，

$\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 R_p 的基，故

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\gamma_n(t),$$

其中级数按 L_p 范数收敛。但

$$a_m=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\gamma_n(t)\right)\gamma_m(t)dt=b_m$$

（注意将 $\gamma_m(t)$ 看作 $L_p^*=L_q$ 的元，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$），故

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t)=Pf,$$

因而 P 是 $L_p\longrightarrow R_p$ 的投影。

(2) $1<p<2$，设 $f\in L_p\cap L_2$，令

$$a_n=\int_0^1 f(t)\gamma_n(t)dt,\quad n\geqslant 1,\quad Pf=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t),$$

应用 Khintchine 不等式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t)$ 在 L_p 中收敛且

$$\begin{aligned}\|Pf\|_p&=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n(t)\right\|_p\leqslant B_p\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\\&\leqslant B_p\sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n\right|;(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in l_2,\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty\right\}\\&\leqslant B_p\sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\gamma_n(t)\right)dt\right|;(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\in l_2,\right.\\&\qquad\left.\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty\right\}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

由 H del 不等式，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\gamma_n(t)\right)dt\right|&\leqslant\|f\|_p\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\gamma_n(t)\right\|_q\\&\leqslant\|f\|_p B_q\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{1.15}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$2<q<+\infty$。

故由(1.14)、(1.15)知，

$$\|Pf\|_p\leqslant B_pB_q\|f\|_p,\quad \forall f\in L_2\cap L_p,$$

由于 $L_p \cap L_2$ 在 L_p 中稠，故可将 P 延拓为 $L_p \longrightarrow L_p$ 的有界线性算子。

同样，对 $f \in R_p$，因 $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 R_p 的基(根据 Khintchine 不等式)，故

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma_n(t),$$

其中级数按 L_p 范数收敛。但

$$a_m = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma_n(t) \right) \gamma_m(t) dt = b_m,$$

故

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_n(t) = Pf,$$

因此 P 是 $L_p \longrightarrow R_p$ 的投影。证毕。

注 1 $R_p \approx R_q \approx l_2$，$1 \leqslant p$，$q < +\infty$(根据 Khintchine 不等式)。□

注 2 $R_2 \neq L_2$，事实上，取 $f(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$，则 $(f, \gamma_n) = 0$，$\forall n$，但 $f \neq 0$。□

推论 1.3.7 $l_2 \overset{c}{\subset\!\to} L_p$，$1 < p < +\infty$。

证明 由定理 1.3.6，R_p 在 L_p 中可补，由注 1，$l_2 \approx R_p$。证毕。

注 R_1 在 L_1 中不可补。这是由于 L_1 不含可补自反子空间(见定理 2.3.25)。□

定理 1.3.8 $R_\infty \cong l_1$。

证明 令 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 为 n 个不为 0 的实数，容易看到，存在 $t_0 \in [0,1]$，使 $\gamma_k(t_0) = \operatorname{sgn} a_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_k \gamma_k(t_0) \right| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \gamma_k(t) \right\|_\infty \leqslant \sum_{q=1}^{n} |a_k|,$$

故

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \gamma_k(t) \right\|_\infty,$$

由此即知，$l_1 \simeq R_\infty$。证毕。

注 证明中用到 a_k 是实数这一性质，当考虑复数值时，仅有 $R_\infty \approx l_1$，事实上，若 $\{a_k\}_{k=1}^n$ 为 n 个复数，设 $a_k = \alpha_k + i\beta_k$，其中 α_k, β_k 为实数，则

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \geqslant \left\| \sum_{k=1}^n a_k \gamma_k(t) \right\|_\infty$$

$$\geqslant \max\left\{ \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \gamma_k(t) \right\|_\infty, \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k \gamma_k(t) \right\|_\infty \right\}$$

$$\geqslant \max\left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|, \sum_{k=1}^n |\beta_k| \right) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|\alpha_k| + |\beta_k|)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

故 $R_\infty \approx l_1$，且取 $a_1 = 1$，$a_2 = i$，即知 $R_\infty \not\simeq l_1$。证毕。□

l_p 也是 L_p 的可补子空间，$1 \leqslant p < +\infty$。这可由下面更一般定理得到。

定理 1.8.9 令 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 是$[0,1]$的可测子集列，$m(A_n) > 0$，$\forall n$，$m(A_i \cap A_j) = 0$，$i \neq j$，其中 m 为$[0,1]$上的 Lebesgue 测度，设 $1 \leqslant p < +\infty$，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 L_p 中范数等于 1 且支撑在 A_n 上的函数列(即 $\|f_n\|_p = 1$，$f_n = f_n \chi_{A_n}$)，则 $Y_p = [f_n]_{n=1}^\infty \simeq l_p$，且 Y_p 在 L_p 中 1 可补。

证明 对任何数列 $\{a_k\}_{k=1}^n$，

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\bigcup_{k=1}^n A_k} \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \int_{A_k} \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

故 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \approx \{e_n\}_{l_p}$ ($\{e_n\}_{l_p}$ 表示 l_p 的自然基)，且

$$Y_p = [f_n]_{n=1}^\infty \simeq l_p.$$

对任意 n，取 $g_n \in L_q[0,1]$，$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，使

$$\|g_n\|_q=\int_0^1 \overline{f_n(t)}g_n(t)dt,$$

对每个 $f\in L_p$，定义 $a_n=\int_{A_n} fg_n dt$，

$$Pf=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t).$$

这个定义是有意义的。事实上，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{A_n} fg_n dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f\chi_{A_n} g_n dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\|g_n\|_q\|f\chi_{A_n}\|_p)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\|f\cdot\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n}\|_p\leqslant\|f\|_p.$$

故 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_p$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n$ 在 L_p 中收敛，且上式也表明

$$\|Pf\|_p\leqslant\|f\|_p,$$

故 P：$L_p\longrightarrow[f_n]_{n=1}^{\infty}$ 是范数为 1 的投影，即 $[f_n]_{n=1}^{\infty}$ 在 L_p 中 1 可补。证毕。

令人感兴趣的是 Kadec 和 Pelczynski 根据 L_p 的上述两类可补子空间($R_p\approx l_2$，$[f_n]_{n=1}^{\infty}\cong l_p$) 得到 L_p 的子空间分类，(对 $1<p<+\infty$)。

先叙述一个有关 L_p，$2\leqslant p<+\infty$ 的子空间的定理。

定理 1.3.10 若 $2\leqslant p<+\infty$，L_p 的每个无限维子空间 X，则或者 $l_2\approx X\subset^C L_p$，或者 $\exists Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^C L_p$。($Y\subset^C X$ 表示 Y 是 X 的可补子空间)

这个定理的证明在于对 X 的单位球面的分析：如果存在一列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，使 f_n 取值集中在测度很小的集上，那么 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就与 l_p 的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价；否则，X 就与 l_2 线性同胚(这后一

事实要用到 $p>2$ 这一条件)。为此,我们引入下面记号。

设 $1\leqslant p<+\infty$, 对 $\varepsilon>0$, 令

$$A(\varepsilon,p)=\{f\in L_p;\ m(t;|f(t)|\geqslant\varepsilon\|f\|_p)\geqslant\varepsilon\}.$$

其中 m 是 $[0,1]$ 上 Lebesgue 测度。

引理 1.3.11 对每个 r, $1\leqslant r<p$, 每个 $f\in A(\varepsilon,p)$, 有

$$\varepsilon^{1+\frac{1}{r}}\|f\|_p\leqslant\|f\|_r\leqslant\|f\|_p$$

证明 记 $E=(t\in[0,1];\ |f(t)|\geqslant\varepsilon\|f\|_p)$。

$$\|f\|_r=\left(\int_0^1|f(t)|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\geqslant\left(\int_E|f(t)|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\geqslant\varepsilon\|f\|_p(mE)^{\frac{1}{r}}$$

$$\geqslant\varepsilon^{1+\frac{1}{r}}\|f\|_p.$$

证毕。

引理 1.3.12 (1) 若 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, 则 $A(\varepsilon_2,p)\subset A(\varepsilon_1,p)$

(2) $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<1}A(\varepsilon,p)=L_p\setminus\{0\}$

(3) 若 $f\notin A(\varepsilon,p)$, 则存在 $A\subset[0,1]$, 使 $m(A)<\varepsilon$, 且

$$\int_A|f(t)|^p dt\geqslant(1-\varepsilon^p)\|f\|_p^p.$$

证明 (1) 因为

$$(t\in[0,1];\ |f(t)|\geqslant\varepsilon_1\|f\|_p)\supset(t\in[0,1];\ |f(t)|\geqslant\varepsilon_2\|f\|_p).$$

证毕。

(2) 若 $f\neq0$, 则 $\exists\delta$, $\eta>0$, 使 $m(t;|f(t)|>\delta)\geqslant\eta$, 选 ε, $0<\varepsilon<1$, 使 $\varepsilon\leqslant\delta\|f\|_p$, $\varepsilon\leqslant\eta$, 则易见 $f\in A(\varepsilon,p)$。证毕。

(3) 若 $f\notin A(\varepsilon,p)$, 则 $m(E)<\varepsilon$, 其中

$$E=\{t;\ |f(t)|\geqslant\varepsilon\|f\|_p\}.$$

故

$$\int_{[0,1]\setminus E}|f(t)|^p dt\leqslant\varepsilon^p\|f\|_p^p,$$

从而

$$\int_E|f(t)|^p dt\geqslant\|f\|_p^p-\varepsilon^p\|f\|_p^p=(1-\varepsilon^p)\|f\|^p.$$

证毕。

从这个引理，我们看到若 $f\notin A(\varepsilon,p)$，则 f "集中分布在测度小于 ε 的集上。

引理 1.3.13 设 $1\leqslant p<+\infty$，若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(L_p)$，且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不完全含于任何 $A(\varepsilon,p)$ 中，$0<\varepsilon<1$，则存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使 $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\overset{2}{\approx}(e_n)_{l_p}$，且 $[f_{n_i}]_{i=1}^{\infty}\subset^{C}L_p$。

证明　首先，对任何 ε，$0<\varepsilon<1$，集 $\{n;f_n\notin A(\varepsilon,p)\}$ 是无限的。事实上，否则，存在 ε_0，$0<\varepsilon_0<1$，使

$$\{n;f_n\notin A(\varepsilon,p)\}=\{n_1,\cdots,n_p\}.$$

但由引理 1.3.12(2) 知，$f_{n_i}\in A(\varepsilon_i,p)$，$1\leqslant i\leqslant n$，根据引理 1.3.12(1)，$\{f_n\}\subset A(\varepsilon^*,p)$，其中 $\varepsilon^*=\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$。矛盾。

所以，对每个 $\varepsilon>0$，每个 $n_0\geqslant1$，存在 $n_\varepsilon>n_0$，使 $f_{n_\varepsilon}\notin A(\varepsilon,p)$。

取 η，$0<\eta<\frac{3}{64}$，令 $\varepsilon_1=\frac{1}{4^2}-\eta$，由于 $\{f_h\}_{n=1}^{\infty}$ 不完全含于 $A(\varepsilon_1,p)$，故存在 n_1，使 $f_{n_1}\notin A(\varepsilon_1,p)$，由引理 1.3.12(3) 知，存在 $A_1\subset[0,1]$，使 $m(A_1)<\varepsilon_1$，且

$$\int_{A_1}|f_{n_1}(t)|^p dt\geqslant1-\varepsilon_1^p,$$

选 $\varepsilon_2<\frac{1}{4^3}-\eta$，使得当 $m(A)<\varepsilon_2$ 时，有

$$\int_A|f_{n_1}(t)|^p dt<\varepsilon_1^p.$$

存在 $n_2>n_1$，使 $f_{n_2}\notin A(\varepsilon_2,p)$。因此，由引理 1.3.12(3)，存在 $A_2\subset[0,1]$，使 $m(A_2)<\varepsilon_2$，且

$$\int_{A_2}|f_{n_2}(t)|^p dt\geqslant1-\varepsilon_2^p.$$

假设已选好 $[0,1]$ 的可测子列 $A_1,\cdots,A_k$ 及正整数 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，正数 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k$，使得对 $i=1,\cdots,k$，有

$$m(A_i)\leqslant\varepsilon_i<\frac{1}{4^{i+1}}\eta,$$

$$\int_{A_i} |f_{n_i}(t)|^p dt \geqslant 1-\varepsilon_i^p,$$

$$\int_{A_i} (|f_{n_1}(t)|^p+\cdots+|f_{n_{i-1}}(t)|^p)dt<\varepsilon_{i-1}^p.$$

现选取 $\varepsilon_{k+1}<\frac{1}{4^{k+2}}\eta$，使得当 $m(A)<\varepsilon_{k+1}$时，有

$$\int_A (|f_{n_1}(t)|^p+\cdots+|f_{n_k}(t)|^p)dt<\varepsilon_k^p,$$

取 $n_{k+1}>n_k$，使 $f_{n_{k+1}}\notin A(\varepsilon_{k+1},p)$，由引理1.3.12(3)，存在 $A_{k+1}\subset[0,1]$，使 $m(A_{k+1})<\varepsilon_{k+1}$，且

$$\int_{A_{k+1}} |f_{n_{k+1}}(t)|^p dt \geqslant 1-\varepsilon_{k+1}^p.$$

继续这个过程，

令 $B_k=A_k\setminus\bigcup\limits_{j>k}A_j$，对 $k=1,2,\cdots$，则 $B_k\neq\Phi$，且

$$B_k\cap B_l=\Phi,\quad k\neq l,$$

同时

$$\begin{aligned}1&\geqslant\int_{B_k}|f_{n_k}(t)|^p dt\geqslant\int_{A_k}|f_{n_k}(t)|^p dt-\sum_{j>k}\int_{A_j}|f_{n_j}(t)|^p dt\\&\geqslant 1-\varepsilon_k^p-(\varepsilon_k^p+\varepsilon_{k+1}^p+\cdots)\\&\geqslant 1-\left(\frac{1}{4^{k+1}}\eta\right)^p-\left[\left(\frac{1}{4^{k+1}}\eta\right)^p+\left(\frac{1}{4^{k+2}}\eta\right)^p+\cdots\right]\\&\geqslant 1-\frac{1}{4^{kp}}\eta^p\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p-1}\right)\geqslant 1-\frac{1}{4^{kp}}\eta^p.\end{aligned}$$

令

$$g_k=\frac{f_{n_k}\chi_{B_k}}{\|f_{n_k}\chi_{B_k}\|_p},$$

则 $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 是具不相交支撑的范数为1的函数列，由定理1.3.9知，$\{g_k\}_{k=1}^\infty\approx(e_n)_p$，且 $[g_k]_{k=1}^\infty\subset^c L_p$。（这时 $[g_k]_{k=1}^\infty$ 还是 L_p 的1可补子空间）

但是，

$$\|f_{n_k}-f_{n_k}\chi_{B_k}\|_p=\left(\int_{[0,1]\setminus B_k}|f_{n_k}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{4^k}\eta.$$

$$\|f_{n_k}\chi_{B_k}-g_k\|_p^p=(1-\|f_{n_k}\chi_{B_k}\|_p)^p\leqslant 1-\|f_{n_k}\chi_{B_k}\|_p^p\leqslant\frac{1}{4^{kp}}\eta^p.$$

故

$$\|f_{n_k}g_k\|_p\leqslant 2\cdot\frac{1}{4^k}\eta,$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_k}-g_k\|_p\leqslant\frac{8}{3}\eta<\frac{1}{8},$$

故易见(附录 2 定理 2.7)，$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\approx\{e_n\}_{l_p}$，且 $[f_{n_k}]_{k=1}^{\infty}\subset^c L_p$(观察附录 2 定理 2.7，还可使 $P: L_p\longrightarrow[f_{n_k}]_{k=1}^{\infty}$ 投影满足 $\|P\|<2$，且 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\overset{2}{\approx}\{e_n\}_{l_p}$。证毕。

定理 1.3.10 的证明　设 X 是 L_p 的无限维子空间。考虑 X 的单位球面 $S(X)$。分两种情况：

(1) 若 $S(X)\subset A(\varepsilon,p)$，对某个 $\varepsilon>0$。

由引理 1.3.11，并注意到 $2<p$，故

$$\varepsilon^{1+\frac{1}{2}}\|f\|_p\leqslant\|f\|_2\leqslant\|f\|_p,\ \forall f\in X.$$

从而 $X\approx L_2\cong l_2$。

(2) 若对任 $0<\varepsilon<1$，$S(X)$ 不完全含于 $A(\varepsilon,p)$，考虑

$$\varepsilon=\frac{1}{2^n},\ n\geqslant 1,$$

则可得到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，使 $f_n\notin A\left(\frac{1}{2^n},\ p\right)$，应用引理1.3.12(1)知，对任 $0<\varepsilon<1$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不完全含于 $A(\varepsilon,p)$ 中，由引理 1.3.13 知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 含有子列 $\{f_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\approx\{e_n\}_{l_p},$$

且 $[f_{n_k}]_{k=1}^{\infty}\subset^c L_p$。

当 $X\approx l_2$ 时，我们证明 X 在 L_p 中可补。事实上，由上面情况(2)的证明及 $l_p\hookrightarrow l_2$（定理 1.2.3）知，此时存在 $\varepsilon>0$，使

$S(X)\subset A(\varepsilon,p)$，故由上面情况(1)证明知，

$$\varepsilon^{1+\frac{1}{2}}\|f\|_p\leqslant\|f\|_2\leqslant\|f\|_p,\ \forall f\in X.$$

因此 X 可看作 L_2 的子空间，从而存在投影 P：$L_2\longrightarrow X$，对任 $f\in L_p$，由于 $p\geqslant 2$，故 $f\in L_2$，从而 $Pf\in X$，且

$$\|Pf\|_p\leqslant\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\|Pf\|_2\leqslant\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\|f\|_2\leqslant\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\|f\|_p,$$

因此，X 在 L_p 中可补。证毕。

注　从定理证明看到，$p\geqslant 2$ 起了重要作用。可以证明对 $1\leqslant p\leqslant r\leqslant 2$，$L_r$ 等距于 L_p 的一个子空间，故定理对 $1\leqslant p<2$ 不成立。Rosenthal(R-1) 证明若 $1<p<2$，X 是 L_p 的子空间，则或者存在一个 $r>p$，使 $X\subset\!\!\rightarrow L_r$，或者存在 $Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^c L_p$。□

然而，对可补子空间却有下面定理成立。

定理 1.3.14　若 $1<p<+\infty$，则 L_p 的每个可补子空间 X，或者 $X\approx l_2$，或者 $\exists Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^c L_p$。

证明　当 $2\leqslant p<+\infty$ 时，由定理 1.3.10 即知。

设 $1<p<2$，X 是 L_p 的可补子空间，则 X^* 线性同胚于 L_q 的一个可补子空间 M。其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若 $X\not\approx l_2$，则 $X^*\not\approx l_2$，从而 $M\not\approx l_2$，因为 $2<q<+\infty$，应用定理 1.3.10，M 含有一个子空间 Z，使 $l_q\not\approx Z\subset^c L_q$，从而更有 $Z\subset^c M$。容易看到，X^* 含有一个可补子空间 H，使 $H\approx Z$。从而 H^* 线性同胚于 X^{**}($\cong X$，因 X 自反)的一个可补子空间 Y，即 $Y\approx H^*\approx Z^*\approx l_p$，且由于 $X\subset^c L_p$，故 $Y\subset^c L_p$。证毕。

对 L_1 的子空间，有

定理 1.3.15　设 X 是 L_1 的子空间，则或者 X 自反，或者 $\exists Y\subset X$，使 $l_1\approx Y\subset^c L_1$。

这个定理的证明依赖于 L_1 中 w 紧集特征。我们可在更一般的 $L_1(\mu)$ 中讨论，其中 (Ω,Σ,μ) 是有限完备测度空间。

定义 1.3.3　$A(\subset L_1(\mu))$ 称为等度连续集，如果对任何 $\varepsilon>0$，

存在 $\delta>0$，使得对任 $E\in\Sigma,\mu(E)<\delta$，有

$$\sup\left\{\int_E|f|d\mu;\ f\in A\right\}<\varepsilon.$$

$A(\subset L_1(\mu))$称为一致可积的，如果

$$\lim_{a\to\infty}\sup\left\{\int_{|f|>a}|f(\omega)|d\mu;\ f\in A\right\}=0.$$

定理 1.3.16 设 $A\subset L_1(\mu)$，则 A 是一致可积，当且仅当A是范数有界且等度连续的。

证明 "$\Longrightarrow$"设 A 是一致可积的，由定义，存在 $a_0>0$，使

$$\sup\left\{\int_{(|f|>a_0)}|f(\omega)|d\mu;\ f\in A\right\}<1.$$

故 $\sup\{\|f\|;\ f\in A\}<1+a_0$。即 A 范数有界

由于

$$\int_E|f(\omega)d\mu=\int_{E\cap(|f|\leqslant a)}|f(\omega)|d\mu+\int_{E\cap(|f|>a)}|f(\omega)|d\mu$$

$$\leqslant a\mu(E)+\int_{(|f|>a)}|f(\omega)|d\mu.$$

因此，对任 $\varepsilon>0$，选 a_1，使

$$\sup\left\{\int_{(|f|>a_1)}|f(\omega)|d\mu;\ f\in A\right\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3a_1}$，则当 $\mu(E)<\delta$ 时，有

$$\sup\left\{\int_E|f(\omega)|d\mu;f\in A\right\}\leqslant\varepsilon,$$

因此 A 是等度连续的。

"$\Longleftarrow$"设 A 是范数有界且等度连续的，对任何 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $\mu(E)<\delta$ 时，有

$$\int_E|f(\omega)|d\mu\leqslant\varepsilon,\ \forall f\in A.$$

设 $M=\sup\{\|f\|;f\in A\}$，选 $a_0>\dfrac{M}{\delta}$，则当 $a\geqslant a_0$ 时，对任 $f\in A$，

$$\mu(\omega;\ |f(\omega)|>a)\leqslant\frac{\|f\|}{a}\leqslant\frac{M}{a_0}<\delta,$$

故

$$\sup\left\{\int_{(|f|>a)}|f(\omega)|d\mu;\ f\in A\right\}\leqslant\varepsilon,$$

即 A 是一致可积的，证毕。

$L_1(\mu)$ 中一致可积集实际上就是相对 w 紧集。为此，我们再作若干准备工作。

定理 1.3.17 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L_1(\mu)$，使得对一切 $A\in\Sigma$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(\omega)d\mu\ \text{存在},$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的，且存在 $f\in L_1(\mu)$，使 $f_n\xrightarrow{w}f$，

特别地，若 $f_n\xrightarrow{w}f$，则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的。

证明 我们不妨设 f_n 是实值的。

考虑(Ω,Σ,μ)中等价关系$\sim$：$A_1\sim A_2$ 当且仅当$\mu(A_1\triangle A_2)=0$，其中 $A_1\triangle A_2=(A_1\cup A_2)\setminus(A_1\cap A_2)$ 是 A_1,A_2 的对称差集(易见"$\sim$"是一个等价关系)。设 Σ_0 是 Σ 关于$\sim$的商 σ 代数，其中的元记为$[A]$(在表达式中，我们就记 $A\in\Sigma$ 为 $[A]$ 的代表元)。

在 Σ_0 上定义度量 d：

$$d([A_1],[A_2])=\mu(A_1\triangle A_2),\ \forall[A_1],[A_2]\in\Sigma_0.$$

(Σ_0,d)是完备度量空间。事实上，设 $\{[A_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是(Σ_0,d) 中 Cauchy 列，则由于

$$d([A_n],[A_m])=\mu(A_n\triangle A_m)=\int_\Omega\chi_{A_n\triangle A_m}d\mu$$

$$=\int_\Omega|\chi_{A_n}-\chi_{A_m}|d\mu,$$

故 $\{\chi_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(\mu)$ 中 Cauchy 列，因此存在 $f_0\in L_1(\mu)$，使 $\chi_{A_n}\xrightarrow{\|\cdot\|}f_0$。又由于 $\{\chi_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 μ a.e 收敛于 f_0，故 f_0 为取值 0、1 的函数。从而存在 $A_0\in\Sigma$，使 $f_0=\chi_{A_0}$。因此

$$d([A_n],[A_0]) = \mu(A_n \triangle A_0) = \int_0^1 |\chi_{A_n} - \chi_{A_0}| d\mu \longrightarrow 0,$$

这就证明了(Σ_0, d)是完备度量空间。

对每个 $f \in L_1(\mu)$，定义(Σ_0, d)上一个函数

$$\hat{F}_f[(A)] \equiv F_f(A) = \int_A f(\omega) d\mu.$$

易见$\hat{F}_f$是可以定义的，且我们知道$\hat{F}_f$是(Σ_0, d)上一致连续函数。事实上，对任意$[A_1], [A_2] \in \Sigma_0$，

$$|\hat{F}_f([A_1]) - \hat{F}_f([A_2])| = \left| \int_{A_1} f d\mu - \int_{A_2} f d\mu \right|$$

$$\leqslant \int_{A_1 \triangle A_2} |f| d\mu,$$

由 f 的绝对连续性知，$\hat{F}_f$是(Σ_0, d)上一致连续函数。

因此，

$$E_N = \bigcap_{n, m \geqslant N} \{[A] \in \Sigma_0, \ |\hat{F}_{f_n}([A]) - \hat{F}_{f_m}([A])| \leqslant \varepsilon\}$$

是(Σ_0, d)中闭集，对 $N = 1, 2, \cdots$。

由于 $\lim\limits_n \int_A f_n(\omega) d\mu$ 存在，故 $\Sigma_0 = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} E_N$。根据 Baire 纲定理，存在 N_0，使 E_{N_0} 有非空内核，即存在$[A_0] \in \Sigma_0$ 及 $r > 0$，使得当 $\mu(A \triangle A_0) < r$ 时，有$[A] \in E_{N_0}$，特别地，有

$$\left| \int_A (f_n - f_{N_0}) d\mu \right| \leqslant \varepsilon, \text{ 当 } n > N_0, \ \mu(A \triangle A_0) < r \text{ 时} \quad (1.16)$$

对 $f_1, \cdots, f_{N_0}$，选 $r_1 > 0$，使得当 $\mu(B) < r_1$ 时，有

$$\int_B |f_i| d\mu \leqslant \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant N_0. \quad (1.17)$$

因此，当 $A \in \Sigma$，$\mu(A) < \min\{r, r_1\}, n > N_0$ 时，

$$\int_A |f_n| d\mu \leqslant \int_A |f_n - f_{N_0}| d\mu + \int_A |f_{N_0}| d\mu$$

$$= \left| \int_{A \cap (f_n \geqslant f_{N_0})} (f_n - f_{N_0}) d\mu \right| + \left| \int_{A \cap (f_{N_0} > f_n)} (f_n - f_{N_0}) d\mu \right|$$

$$+ \varepsilon = \left| \int_{(A \cap (f_n \geqslant f_{N_0})) \cup A_0} (f_n - f_{N_0}) \, d\mu \right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{A_0\setminus(A\cap(f_n\geqslant f_{N_0}))}(f_n-f_{N_0})\,d\mu\Bigg|\\
&+\Bigg|\int_{(A\cap(f_n<f_{N_0}))\cup A_0}(f_n-f_{N_0})d\mu\\
&-\int_{A_0\setminus(A\cap(f_n<f_{N_0}))}(f_n-f_{N_0})d\mu\Bigg|+\varepsilon\\
\leqslant&\Bigg|\int_{A\cap(f_n\geqslant f_{N_0}))\cup A_0}(f_n-f_{N_0})\,d\mu\Bigg|\\
&+\Bigg|\int_{A_0\setminus(A\cap(f_n\geqslant f_{N_0}))}(f_n-f_{N_0})\,d\mu\Bigg|\\
&+\Bigg|\int_{A\cap(f_n<f_{N_0}))\cup A_0}(f_n-f_{N_0})\,d\mu\Bigg|\\
&+\Bigg|\int_{A_0\setminus(A\cap(f_n<f_{N_0}))}(f_n-f_{N_0})\,d\mu\Bigg|+\varepsilon
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&(A_0\cup(A\cap(f_n\geqslant f_{N_0})))\triangle A_0\subset A,\\
&(A_0\setminus(A\cap(f_n\geqslant f_{N_0})))\triangle A_0\subset A,\\
&(A_0\cup(A\cap(f_n<f_{N_0})))\triangle A_0\subset A,\\
&(A_0\setminus(A\cap(f_n<f_{N_0})))\triangle A_0\subset A,
\end{aligned}
$$

故得

$$
\int_A|f_n|\,d\mu<5\varepsilon. \tag{1.18}
$$

由(1.17)和(1.18)知,对任 $\varepsilon>0$, 当 $\mu(A)<\min(r_1,r)$ 时

$$
\sup_n\left\{\int_A|f_n|\,d\mu\right\}\leqslant 5\varepsilon.
$$

这表明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等度连续的. 如果取 Ω 的分割 $\pi=\{A_1,\cdots,A_l\}$, 使 $\max\{m(A_j),\ 1\leqslant j\leqslant l\}<\min(r_1,r)$, 则

$$
\|f_n\|=\int_0^1 |f_n(\omega)|\,d\mu\leqslant 5\varepsilon l.
$$

故 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是范数有界的. 根据定理 1.3.15 知, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的. 由此,令

$$
F(A)=\lim_n\int_A f_n\,d\mu,\quad \forall A\in\Sigma,
$$

则 F 是(Ω, Σ)上 μ 连续的测度，由 Radon-Nikydom 定理知，$\exists f\in L_1(\mu)$，使

$$F(A)=\int_A f(\omega)d\mu. \quad \forall A\in\Sigma,$$

因此，对任何 $A\in\Sigma$，

$$\int_\Omega f_n\chi_A d\mu \longrightarrow \int_\Omega f\chi_A d\mu.$$

同时，对任何简单函数

$$g=\sum_{i=1}^k a_i\chi_{A_i}\in L_\infty(\mu),$$

有

$$\int_\Omega f_n g d\mu \longrightarrow \int_\Omega f g d\mu.$$

由于简单函数在 $L_\infty(\mu)$ 中稠，及 $\sup\limits_n\|f_n\|<+\infty$，知

$$f_n \xrightarrow{w} f.$$

证毕。

注　由这个定理立刻看到，若 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset L_1(\mu)$，则

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 w 收敛的 $\Longleftrightarrow \lim\limits_n\int_A f_n(\omega)d\mu$ 存在，$\forall A\in\Sigma$

$\Longleftrightarrow \{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是一致可积且 w 收敛的．□

定理 1.3.18　若 $A\subset L_1(\mu)$，则

A 是相对 w 紧的，当且仅当 A 是一致可积的。

证明　"$\Longrightarrow$"假设 A 不是一致可积的，则存在 $\varepsilon>0$，及 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset A$，使得对任何 n，有

$$\int_{(|f_n|>n)}|f_n(\omega)|d\mu>\varepsilon.$$

因此，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 没有子列是一致可积的，由定理 1.3.16 注，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 没有子列是 w 收敛的。根据 Eberlein 定理 (Banach 空间 X 中集合 A 是相对 w 紧的，当且仅当 A 是相对 w 序列紧的)故 A 不是相对 w 紧的。

“$\Longleftarrow$”假设 A 是一致可积的，由定理 1.3.6 知，A是范数有界的，根据 Banach-Alaoglu 定理，A 的 w^* 闭包 $\overline{A}^*(\subset L_1^{**}(\mu)\cong L_\infty^*(\mu)$ 是 w^* 紧的，下面将证明 $\overline{A}^*\subset L_1(\mu)$，从而 A 是相对 w 紧的。

任取 $\Phi\in\overline{A}^*$，则存在 net$\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset A$，使 $f_\alpha\xrightarrow{w^*}\Phi$，即

$$\lim_\alpha\int_\Omega f_\alpha(\omega)g(\omega)d\mu\longrightarrow\Phi(g),\quad\forall g\in L_\infty(\mu),$$

更有

$$\lim_\alpha\int_E f_\alpha(\omega)d\mu=\Phi(\chi_E),\forall E\in\Sigma.$$

令

$$F(E)=\Phi(\chi_E),\quad\forall E\in\Sigma,$$

由于 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一致可积的，根据定理 1.3.16，$\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是等度绝对连续的，即对任何 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $\mu(E)<\delta$ 时，有

$$\sup_\alpha\left\{\left|\int_E f_\alpha d\mu\right|\right\}\leqslant\sup_\alpha\left\{\int_E|f_\alpha|d\mu\right\}<\delta.$$

从而 $|F(E)|<\delta$，因此 F 是(Ω,Σ)上 μ 连续的测度，由 Radon-Nikodym 定理，$\exists f\in L_1(\mu)$，使

$$\lim_\alpha\int_E f_\alpha(\omega)d\mu=\Phi(\chi_E)=F(E)=\int_E f(\omega)d\mu,\ \forall E\in\Sigma.$$

由此，对任何简单函数

$$g=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\in L_\infty(\mu),$$

有

$$\lim_\alpha\int_\Omega f_\alpha(\omega)g(\omega)d\mu=\int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu.$$

由于 $\sup_\alpha\|f_\alpha\|<+\infty$，因此，$f_\alpha\xrightarrow{w}f$，故$\Phi=f\in L_1(\mu)$，这表明 $\overline{A}^*\subset L_1(\mu)$。证毕。

如了以上这些准备工作后，我们可以证明定理 1.3.14，但值得注意的是，上述这些定理本身也是很有意义的。

定理1.3.15的证明　设 X 是 L_1 的子空间，分两种情况考虑：

(1) X 的单位球面 $S(X)$ 是一致可积的，但 $U(X)$ 是 w 闭的（根据 Mazur 定理：Banach 空间 X 中凸集是 w 闭的，当且仅当它是范闭的），由定理 1.3.18 知 $U(X)$ 是 w 紧的，因此，X 是自反的（自反的充要条件）。

(2) $S(X)$ 不是一致可积的。我们将构造 $S(X)$ 的一个序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{e_n\}_{l_1}$，且 $[u_n]_{n=1}^{\infty}\subset^{c}L_1$。

首先，由于

$$\sup\left\{\int_{(|f|>a)}|f(t)|dt;f\in S(X)\right\}$$

$$\geqslant\sup\left\{\int_{(|f|>b)}|f(t)dt;\ f\in S(X)\right\},$$

如果 $a\leqslant b$，因此，若 $S(X)$ 不是一致可积的，则存在 δ，$0<\delta<1$，使

$$\lim_{a\to\infty}\sup\left\{\int_{(|f|>a)}|f(t)|dt;f\in S(X)\right\}=\delta>0.$$

因此，存在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$a_1<a_2<\cdots$，$a_n\longrightarrow\infty$，使

$$\delta\left(1-\frac{1}{2n}\right)<\sup\left\{\int_{(|f|>a_n)}|f(t)|dt;f\in S(X)\right\}$$

$$<\delta\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

故存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，使得对 $\forall n$，

$$\delta\left(1-\frac{1}{2n}\right)<\int_0^1|f_n(t)|\chi_{(|f_n|>a_n)}dt<\delta\left(1+\frac{1}{2n}\right).\quad(1.19)$$

令

$$g_n=f_n\chi_{(|f_n|>a_n)},\quad h_n=f_n-g_n=f_n\chi_{(|f_n|\leqslant a_n)},$$

对任 $\varepsilon>0$，有

$$m(|g_n|\geqslant\varepsilon\|g_n\|)\leqslant m(|g_n|>0)\leqslant m(|f_n|>a_n)\leqslant\frac{1}{a_n}\longrightarrow0,$$

故 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子列不完备包含在 $A(\varepsilon,1)$ 中，对任

何 $\varepsilon>0$，由引理 1.3.13，对 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及它的任何子列存在一个子列（仍记作 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$），使

$$\left\{\frac{g_n}{\|g_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}\overset{2}{\approx}(e_n)_{l_1},$$

且 $[g_n]_{n=1}^{\infty}\subset^c L_1$，对任 n，$\frac{\delta}{2}\leqslant\|g_n\|\leqslant\frac{3\delta}{2}$（且注意存在投影 P: $L_1\to[g_n]_{n=1}^{\infty}$，具 $\|P\|<2$）。下面的问题是如何将 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 转到 X 中序列。为此，我们证明 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的。

对任何 $n\geqslant 1$，若 $m\leqslant n$，

$$|h_m(t)|=|f_m\chi_{(|f_m|<a_m)}|\leqslant a_m<a_n,$$

故

$$(|h_m|>a_m)=\varnothing,$$

因此

$$\sup_m\left(\int_{(|h_m|>a_n)}|h_m(t)|dt\right)=\sup_{m>n}\left(\int_{(|h_m|>a_n)}|h_m(t)|dt\right)$$

但当 $m>n$ 时，

$$\begin{aligned}\int_{(|h_m|>a_n)}|h_m(t)|dt&=\int_{(a_n<|f_m|<a_m)}|f_m(t)|dt\\&=\int_{(|f_m|>a_n)}|f_m(t)|dt-\int_{(|f_m|>a_m)}|f_m(t)|dt\\&\leqslant\delta\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\delta\left(1-\frac{1}{2m}\right)\end{aligned}$$

（由(1.19)）。

故

$$\begin{aligned}\sup_m\int_{(|h_m|>a_n)}|h_m(t)|dt&\leqslant\delta\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\delta\left(1-\frac{1}{2m}\right)\\&\leqslant\frac{\delta}{n}\longrightarrow 0,\quad n\longrightarrow\infty.\end{aligned}$$

由于 $a_n\nearrow+\infty$，故 $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的。根据定理 1.3.18，$\{h_n(t)\}$ 是相对 w 紧，再应用 Eberlein 定理知，$\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列（仍记作 $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$）$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $h_n(t)\xrightarrow{w}0$，从而，

$$h_{2k}-h_{2k+1}\xrightarrow{w}0,\ k\longrightarrow\infty.$$

由 Mazur 定理，$0\in\overline{co}(h_{2k}-h_{2k+1})_{k=1}^{\infty}$，因此，可找到正整数的增加序列 $(k_j)_{j=1}^{\infty}$，及非负数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，使

$$\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} a_i=1,$$

且 $\|z_j\|\longrightarrow 0$，其中

$$z_j=\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} a_i(h_{2i}-h_{2i+1}),\quad \forall j.$$

令

$$u_j=\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} a_i(f_{2i}-f_{2i+1}),\quad v_j=\sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} a_i(g_{2i}-g_{2i+1}),$$

则

$$\|u_j-v_j\|=\|z_j\|\longrightarrow 0$$

（注意，此时 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 也已经是子列），我们有

$$\{v_j\}_{j=1}^{\infty}\overset{6}{\approx}\{e_n\}_{l_1},$$

且 $[v_j]_{j=1}^{\infty}\subset^{c}L_1$。事实上，因

$$\left\{\frac{g_n}{\|g_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}\overset{2}{\approx}\{e_n\}_{l_1},$$

故对任 $(t_n)\in l_1$，有

$$\frac{\delta}{2}c_1\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}t_ng_n\right\|\leqslant\frac{3\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\qquad(c_1^{-1}\leqslant 2).$$

由于

$$v_n=\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} a_i(g_{2i}-g_{2i+1}),$$

其中

$$\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} a_i=1,\quad a_i\geqslant 0,$$

故对任 $(b_n)\in l_1$，

$$\delta c_1\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}b_nv_n\right\|\leqslant 3\delta\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|,$$

因此，

$$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}\overset{6}{\approx}\{e_n\}_{l_1},$$

且

$$\delta c_1\leqslant\|v_n\|\leqslant 3\delta,\quad \forall n.$$

选 $v_n^*\in L_1^*\simeq L_\infty$， 使 $v_n^*(v_n)=1$，$\|v_n^*\|\leqslant(\delta c_1)^{-1}$，定义 $P:[g_n]_{n=1}^{\infty}\longrightarrow[v_n]_{n=1}^{\infty}$，

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_ng_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n^*\left(\sum_{i=2k_n+1}^{2k_{n+1}+1}t_ig_i\right)v_n,\quad \forall\sum_{n=1}^{\infty}t_ng_n\in[g_n]_{n=1}^{\infty},$$

则

$$\left\|P\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_ng_n\right)\right\|\leqslant 3\delta\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n^*\left(\sum_{i=2k_n+1}^{2k_{n+1}+1}t_ig_i\right)\right|$$

$$\leqslant 3c_1^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=2k_n+1}^{2k_{n+1}}t_ig_i\right\|$$

$$\leqslant\frac{9}{2}\delta c_1^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|\leqslant 9c_1^{-2}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}t_ng_n\right\|\leqslant 36\left\|\sum_{n=1}^{\infty}t_ng_n\right\|,$$

$$Pv_n=P\left(\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}}a_i(g_{2i}-g_{2i+1})\right)=v_n^*(v_n)v_n=v_n.$$

故 P 是 $[g_n]_{n=1}^{\infty}$ 到 $[v_n]_{n=1}^{\infty}$ 上投影，即 $[v_n]_{n=1}^{\infty}\subset^c[g_n]_{n=1}^{\infty}\subset^cL_1$，故 $[v_n]_{n=1}^{\infty}\subset^cL_1$。且存在 $P_0:L_1\longrightarrow[v_n]_{n=1}^{\infty}$ 的投影有 $\|P_0\|<72$。

值得注意的是，对 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子序列 $\{g_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，相应的 $\{v_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 也有 $\{v_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\overset{6}{\approx}\{e_n\}_{l_1}$，$[v_{n_i}]_{i=1}^{\infty}\subset^cL_1$，且 $\delta c_1\leqslant\|v_{n_i}\|\leqslant 3\delta$，$\forall i$，我们还注意到，存在投影 $P_0:L_1\longrightarrow[v_{n_i}]_{i=1}^{\infty}$ 使 $\|P_0\|<72$，且 $\{v_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数 $\leqslant 6$，由于

$$\|u_{n_i}-v_{n_i}\|\to 0,\quad \delta c_1\leqslant\|v_{n_i}\|\leqslant 3\delta,\ \forall i,$$

故可选 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{g_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$，使相应的 $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，$\{v_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 满足

	子空间 X	可补子空间 X	具体可补子空间	基	基序列
L_p $2\leqslant p<+\infty$	或 $l_2\approx X\subset^c L_p$ 或 $\exists\ Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^c L_p$ （定理 1.3.10）	或 $l_2\approx X\subset^c L_p$ 或 $\exists\ Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^c L_p$ （定理1.3.10）	(1) $R_p(\approx l_2)$ (2) l_p （定理1.3.6）	Haar 组（无条件基） （定理1.3.1）	Rademacher 函数组 （定理1.3.6）
L_p $1<p<2$	或 $\exists\ r>p$，使 $X\subset_{\to} L_r$ 或 $\exists\ Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^c L_p$ （R-1）	或 $X\approx l_2\subset^c L_p$ 或 $\exists\ Y\subset X$，使 $l_p\approx Y\subset^c L_p$ （定理1.3.14）	(1) $R_p(\approx l_2)$ (2) l_p （定理1.3.6）	Haar 组（无条件组） （定理1.3.1）	Rademacher 函数组 （定理1.3.6）
L_1	(1) 或 X 自反 或 $\exists\ Y\subset X$，使 $l_1\approx Y\subset^c L_1$ （定理1.3.15） (2) X 自反 $\Longleftrightarrow XB$ $\Longleftrightarrow X$ 具 BSP （R-1） (3) X 具 RNP $\Longleftrightarrow X$ 具 PC （R-1）	(1) 若 X 具 RNP 则 $X\approx l_1$ （定理2.3.26） (2) X 自反 $\Longleftrightarrow$ $\dim X<+\infty$ （定理2.3.25） (3) X 具 Schur 性质 $\Longleftrightarrow X$ 具强 Schur 性质 （定义1.3.3，O-1） (4) X 不具 Schur 性质 $\Longleftarrow$ $l_2\subset_{\to} X$， （O-1） (5) X 不具 Schur 性质 $\Longleftarrow$ $(\Sigma\oplus l_2)_1\subset_{\to} X$ （O-1） (6) X 具强 Schur 性质且具无条件 FDD $\Longleftarrow$ $X\subset_{\to} l_1$ （O-1）	(1) $R_1(\approx l_2)$ 不可补 (2) l_1 （定理1.3.6）	Haar 组（不是无条件的） （定理1.3.1）	Rademacher 函数组 （定理1.3.6）

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|u_{n_i}-v_{n_i}\|}{\|v_{n_i}\|}<\frac{1}{6\cdot 8\cdot 72}\ (\{v_{n_i}\}\text{基常数}\leqslant 6).$$

由于 $P_0: L_1 \longrightarrow [v_{n_i}]_{i=1}^{\infty}$ 投影，$\|P_0\|<72$，并且 $\{v_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\approx\{e_n\}_{l_1}$，即知(参见附录 2 定理 2.7)，$\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\approx\{e_n\}_{l_1}$，且 $[u_{n_i}]_{i=1}^{\infty}\subset^{C} L_1$。因 $[u_{n_i}]_{i=1}^{\infty}\subset X$，故定理得证。证毕。

关于 L_1 的进一步性质的讨论见下一章。

作为结束本节，我们将 L_p 的子空间列成表(见前页)。

定义 1.3.3 Banach 空间 X 称为具强 K-Schur 性质，如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\text{sep}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\equiv\inf\{\|x_n-x_m\|; n\neq m\}\geqslant\delta>0$，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\overset{2k\delta^{-1}}{\approx}\{e_n\}_{l_1}$。Banach 空间 X 称为具强 Schur 性质，如果 X 具强 K-Schur 性质，对某个 $K>0$。

一个重要的 Open 问题：X 是 L_1 的可补子空间，具强 Schur 性质，是否 $X\subset_{\rightarrow} l_1$ (详细讨论见 (O-1))？

另外有关的 Open 问题是：若 X 是 L_1 的可补子空间，是否或者 $X\approx l_1$，或者 $X\approx L_1$？

第一章参考文献

(A-1)T.Ando Contractive projections in L_p spaces Pacific. J. Math.17(1966)391—405.

(Ar-1)A. D. Andrew The Banach spaces JT is primary. Pacific J.Math.Vol.108(1983).no.1, 9～17.

(B-C-L-T-1)J.Bowrgain, P. G. Cassaza, J. Lindenstrauss & L.Tzafriri Banach spaces with a.unique uncoditi-onal basis, up to permutation. Memiors A. M. S. Vol. 54(1985).no.322.

(C-1)P.G.Casazza James space is primary Israel J. Math. 26(1977)no.3-4.294～305.

(C-2)P. G.Caszza The Schroeder-Bernstein property for Banach spaces. Contemporary Math. Vol. 85 (1989). 61～78.

(C-S-1)P . G . Casazza &T.Shura Tsirelson's spaces Lecture Notes.1363(1988)Springer.

(K-1)S. Kakutani Some chracterizations of Euclidean space.Japan J.Math.16(1939)93～97.

(K-TJ-1)H. König&N. Tomczak-Jaegerman Bounds for projection constans and 1 summing norms(to appear).

(L-T-1)J.Lindenstrauss &L. Tzafriri On the complemented subspaces problem. Israel J.Math. 9(1971) 263～269.

(M-1)F.J.Murray On complementray manifolds and projections in L_p and l_p. Trans.A.M.S.41 (1937).138～152.

(O-1)E.Odell On certain complemented subspaces of L_1. with the strong schur property. Longhorn Notes (Texas Univ.)1983-1984.177～184.

(R-1)H.P.Rosenthal On subspaces of L_p, Ann. Math. 97 (1973)344～377.

第二章　向量测度的 Radon-Nikodym 定理

本章讨论取值在 Banach 空间的的测度即向量测度。由此，可得到 L_1 与它的子空间的一些性质。但向量测度本身也是一个重要和有趣的课题。我们的讨论侧重于 L_1 到 X 的有界线性算子的工具，也用向量值鞅(Martingale)方法，至于涉及到几何方面的许多性质，请读者参见参考书(D-U-1)或(俞-1)。

§1　向量测度与 Lebesgue-Bochner 空间 $L_p(\mu, X)$

本章除了讨论$([0,1],\mathscr{L},m)$，$L_p[0,1]$之外，还对一般有限完备测度空间(Ω,Σ,μ)及 $L_P(\mu)$进行讨论。X 一般表示 Banach 空间，如不作特别声明即为上述约定。

定义 2.1.1　函数 $F:\Sigma\to X$ 称为可数可加向量测度，简称为向量测度，如果对任$(E_n)_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma, E_i\cap E_j=\phi, i\neq j$，有

$$F(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}F(E_i),$$

其中级数按范数收敛。F 的全变差测度 $|F|$ 定义为

$$|F|(E)=\sup\{\sum_{A_i\in\pi}\|F(A_i)\|;\pi\},\quad\forall E\in\Sigma,$$

其中 π 是 E 的一个（可测有限）分割，即 $E=\bigcup_{i=1}^{n}A_i, A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，$\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$，如果 $|F|(\Omega)<+\infty$，则称 F 为有界变差的。$F:\Sigma\to X$ 称为 μ 连续，如果 $\mu(E)=0$，则 $F(E)=0$。此时记为 $F\ll\mu$。

注1　容易证明（因 Σ 是 Ω 的子集的 σ 代数）$F\ll\mu$ 当且仅当对任 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $E\in\Sigma,\mu(E)<\delta$ 时，有

$$\|F(E)\|<\varepsilon. \quad \square$$

注2　称函数 $F: \Sigma\to X$ 是有限可加的，如果对任何

$$\{E_1,\cdots,E_n\}\subset\Sigma, E_i\cap E_j=\Phi, i\neq j,$$

有

$$F(\bigcup_{i=1}^{n}E_i) = \sum_{i=1}^{n}F(E_i).$$

容易证明，若 F 有限可加且 μ 连续，则 F 是可数可加的。$\square$

定义 2.1.2　简单函数 $f=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i}$ 称为 μ 可测(也叫强可测)，如果 $\{E_1,\cdots,E_n\}\subset\Sigma$，$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$. $f:\Omega\to X$ 称为 μ 可测（也叫强可测），如果存在简单函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\xrightarrow{a.e}0$，$n\to\infty$。$f:\Omega\to X$ 称为 w 可测的，如果对任 $x^*\in X^*$，$x^*(f(\omega))$ 是数值可测函数。$f: \Omega\to X^*$ 称为 w^* 可测的，如果对任 $x\in X$，$\langle x,f(\omega)\rangle$ 是数值可测函数（我们有时使用下列表示：

$$x^*(x)=\langle x,x^*\rangle, x\in X, x^*\in X^*).$$

显然，μ 可测函数是 w 可测的，在 X^* 中，w 可测函数是 w^* 可测的.

下面是著名的 Pettis 定理，它建立了 μ 可测函数与 w 可测函数之间的联系。

定理 2.1.1　(Pettis) 函数 $f: \Omega\to X$ 是 μ 可测的当且仅当 f 是 w 可测的，且具本性可分值，即 $\exists E\in\Sigma$，使 $\mu(E)=0$，且 $\{f(\omega);\omega\in\Omega\backslash E\}$ 是 X 的可分子集。

证明　"$\Longrightarrow$"　若 f 是 μ 可测的，则存在简单函数列

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\quad f_n=\sum_{i=1}^{m(n)}x_i^n\chi_{E_i^n},$$

使 $f_n(\omega)\to f(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega\backslash E$，对某个 $E\in\Sigma$，$\mu(E)=0$. 从而，$\{f(\omega),\omega\in\Omega\backslash E\}\subset[x_i^n]_{i,n}=Y$，显然，$Y$ 是可分的。

"$\Longleftarrow$" 若 f 是 w 可测且具本性可分值。如果忽略零测集，我们不妨设 X 是可分的。设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中可数稠集。取 X的可数 norming 集 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$，即

$$\|x\| = \sup_n |x_n^*(x_n)|, \forall x \in X.$$

(一般地，$\Gamma \subset X^*$ 称为 norming 集，如果 $\|x\| = \sup\{|x^*(x_n)|; x^* \in \Gamma\}$，容易证明可分空间具可数 norming 集。在这里，我们取 $x_n^* \in S(X^*)$，使 $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$，则 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 即为所求集)

由于 $\|f(\omega)\| = \sup\limits_n |x_n^* f(\omega)|$，故 $\|f(\omega)\|$ 是数值可测函数，同样，对任何 m，$\|f(\omega) - x_m\|$ 也是数值可测函数。

对任 $\varepsilon > 0$，令 $E_n(\varepsilon) = \{\omega; \|f(\omega) - x_n\| < \varepsilon\}$，则 $E_n(\varepsilon) \in \Sigma$。定义

$$g_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} x_n, & \text{如果 } \omega \in E_n(\varepsilon) \setminus \bigcup\limits_{m<n} E_m(\varepsilon), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

则 $\|f(\omega) - g_\varepsilon(\omega)\| < \varepsilon$。注意若记 $B_n(\varepsilon) = E_n(\varepsilon) \setminus \bigcup\limits_{m<n} E_m(\varepsilon)$，则

$$g_\varepsilon(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{B_n(\varepsilon)},$$

即 $g_\varepsilon(\omega)$ 是可数值 μ 可测函数。若令 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，则得到一列可数值可测函数

$$g_{\frac{1}{n}}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} x_{m,n} \chi_{B_m(\frac{1}{n})}, \text{使}$$

$$\|g_{\frac{1}{n}}(\omega) - f(\omega)\| < \frac{1}{n}. \qquad \forall \omega \in \Omega$$

(其中 $\{x_{m,n}\} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$)。这表明 $\{g_{\frac{1}{n}}(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $f(\omega)$。下面转到简单函数列使它 a.e 收敛到 $f(\omega)$。

对每个 n，选 k_n，使 $\sum\limits_{m=k_n+1}^{\infty} \mu\left(B_m\left(\frac{1}{n}\right)\right) < \frac{1}{2^n}$，令

$$B_n = \bigcup_{m=k_n+1}^{\infty} B_m\left(\frac{1}{n}\right),$$

则

$$\mu(B_n) < \frac{1}{2^n},$$

且当 $\omega \notin B_n$ 时，

$$\left\| \sum_{m=1}^{k_n} x_{mn} \chi_{B_m\left(\frac{1}{n}\right)} - f(\omega) \right\| < \frac{1}{n}$$

令

$$h_n = \sum_{m=1}^{k_n} x_{mn} \chi_{B_m\left(\frac{1}{n}\right)},$$

则 $h_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$。事实上，令

$$B = \overline{\lim_n} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m.$$

则 $\mu(B) = 0$，当 $\omega_0 \notin B$ 时，则

$$\omega_0 \notin \bigcup_{m=n_0}^{\infty} B_m,$$

对某个 n_0。对任何 $\varepsilon > 0$，选 N，使 $N > n_0$，且$\frac{1}{n} < \varepsilon$，则 $\omega_0 \notin B_n$，当 $n > N$ 时；即当 $n > N$ 时，

$$\|h_n(\omega_0) - f(\omega_0)\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

故 $h_n(\omega_0) \to f(\omega_0)$，证毕。

推论 2.1.2 函数 $f: \Omega \to X$ 是 μ 可测的充要条件为 f 是可数值可测函数列的几乎处处一致极限。

推论 2.1.3 若 f 具本性可分值，且存在 norming集$\Gamma \subset X^*$，使对任 $x^* \in \Gamma$，$x^* f(\omega)$ 是数值可测函数，则 f 是 μ 可测的，特别地，当 Banach 空间 X 是可分时，f 是 μ 可测的，当且仅当 f 是 w 可测的。

定义 2.1.3 μ 可测函数 f 称为 Bochner 可积的，如果存在简单函数 f_n，使

$$\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| = 0.$$

此时，对每个 $E\in\Sigma$，定义

$$\int_E f(\omega)d\mu=\lim_n\int_E f_n(\omega)d\mu,$$

其中对简单函数

$$f_n(\omega)=\sum_{i=1}^k x_i\chi_{E_i},$$

定义

$$\int_E f_n(\omega)d\mu=\sum_{i=1}^k x_i\mu(E\cap E_i)$$

为 $f_n(\omega)$的Bochner 积分。

定理 2.1.4 μ 可测函数 f 是 Bochner 可积的，当且仅当

$$\int_\Omega\|f(\omega)\|d\mu<+\infty.$$

证明 "$\Longrightarrow$" 若 f 是Bochner可积的，则存在简单函数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\|f-f_n\|d\mu=0,$$

从而

$$\int_\Omega\|f(\omega)\|d\mu\leqslant\int_\Omega\|f_1-f\|d\mu+\int_\Omega\|f_1(\omega)\|d\mu<+\infty.$$

"$\Longleftarrow$" 由于 f 是 μ 可测的，由推论 2.1.2，存在可数值 μ 可测函数列

$$\{f_n=\sum_{m=1}^\infty x_{m,n}\chi_{E_{m,n}}\}_{n=1}^\infty$$

使

$$\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\leqslant\frac{1}{n},$$

a.e 成立。故

$$\|f_n(\omega)\|\leqslant\|f_n(\omega)-f(\omega)\|+\|f(\omega)\|\leqslant\frac{1}{n}+\|f(\omega)\|$$

a.e 成立，故

$$\int_\Omega\|f_n(\omega)\|d\mu<+\infty,$$

对每个 n，选 p_n 使

$$\int_{\bigcup\limits_{m=p_n+1}^{\infty} E_{m,n}} \|f_n(\omega)\| d\mu < \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

令

$$g_n = \sum_{m=1}^{p_n} x_{m,n}, \chi_{E_{m,n}},$$

则 g_n 是简单函数，且

$$\int_\Omega \|f - g_n\| d\mu \leqslant \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu + \int_\Omega \|f_n - g_n\| d\mu$$

$$\leqslant \frac{\mu(\Omega)}{n} + \frac{\mu(\Omega)}{n} = \frac{2\mu(\Omega)}{n},$$

从而

$$\lim_n \int_\Omega \|f - g_n\| d\mu = 0,$$

即 f 是 Bochner 可积的。证毕。

记 $L_p(\mu, X) = \{f$ 是 μ 可测的；

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\},$$

则易见 $L_p(\mu, X)$ 是 Banach 空间，$1 \leqslant p < +\infty$。

对 $p = \infty$，$L_\infty(\mu, X) = \{f$ 是本性有界 μ 可测函数；

$$\|f_\infty\| = \operatorname*{esssup}_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\| < +\infty\},$$

易见 $L_\infty(\mu, X)$ 也是 Banach 空间。

定理 2.1.5 若 $f \in L_1(\mu, X)$，则

(1) $\left\|\int_E f(\omega) d\mu\right\| \leqslant \int_E \|f(\omega)\| d\mu, \ \forall E \in \Sigma$.

(2) $F_f(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \Sigma$，是一个有界变差 μ 连续的向量测度，且 $|F_f|(E) = \int_E \|f(\omega)\| d\mu$.

证明 (1) 若 f 是简单函数，则易见

$$\left\|\int_E f(\omega) d\mu\right\| \leqslant \int_E \|f(\omega)\| d\mu \quad \forall E \in \Sigma.$$

从而映象 $f \longmapsto \int_E f(\omega)d\mu$ 是定义在简单函数上范数$\leqslant 1$的线性算子，由于简单函数在 $L_1(\mu|_E, X)$ 中是稠的．故这个映象可唯一延拓为 $L_1(\mu|_E, X)$ 上范数 $\leqslant 1$ 的线性算子，故对任 $f \in L_1(\mu, X)$，有

$$\left\| \int_E f(\omega)d\mu \right\| \leqslant \int_E \| f(\omega) \| d\mu$$

（注 $L_1(\mu|_E, X) = \{f\chi_E, \forall f \in L_1(\mu, X)\}$）．证毕．

(2) 显然 F_f 是有限可加，且由(1)

$$|F_f|(E) \leqslant \int_E \|f\| d\mu, \quad \forall E \in \Sigma,$$

故 $F_f \ll \mu$，从而 F_f 是可数可加的，且

$$|F|(\Omega) \leqslant \int_\Omega \|f\| d\mu < +\infty,$$

从而也容易看到 $f \longmapsto |F_f|(\Omega)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 上连续的，且对简单函数 g，有

$$|F_g|(\Omega) = \int_\Omega \|g\| d\mu,$$

故由连续性知，

$$|F_f|(\Omega) = \int_\Omega \|f\| d\mu, \ \forall f \in L_1(\mu, X).$$

证毕．

定理 2.1.6 若 $T \in L(X, Y)$，$f \in L_1(\mu, X)$，则

$$Tf \in L_1(\mu, Y)$$

且

$$T\left(\int_\Omega f d\mu\right) = \int_\Omega Tf(\omega)d\mu.$$

特别地，

$$\left\langle \int_\Omega f(\omega)d\mu, x^* \right\rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), x^* \rangle d\mu.$$

证明 显然 $Tf(\omega)$ 是 μ 可测的，且由于

$$\|Tf(\omega)\| \leqslant \|T\| \cdot \|f(\omega)\|,$$

故 $Tf \in L_1(\mu, Y)$，考虑下面两个线性算子

$$f \longmapsto T\left(\int_\Omega f d\mu\right), \qquad f \longmapsto \int_\Omega Tf d\mu,$$

显然，它们是有界的，且在简单函数上相等，因此这两个算子相等，故

$$T\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) = \int_{\Omega} T f d\mu.$$

证毕.

从定理 2.1.5，我们提出这样一个问题：是否对每个有界变差 μ 连续的向量测度 F，都存在 $f \in L_1(\mu, X)$，使

$$F(E) = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu, \quad \forall E \in \Sigma.$$

即对 R^1 的 Radon–Nikodym 定理是否对取值在Banach 空间 X 的向量测度都成立呢？回答是否定的。

定义 2.1.4 Banach 空间X称为关于(Ω, Σ, μ)具有Radon-Nikodym 性质，如果对任何 X 值有界变差 μ 连续向量测度 F，均存在 $f \in L_1(\mu, X)$，使

$$F(E) = \int_{E} f(\omega) d\mu, \quad \forall E \in \Sigma.$$

此时称 f 为 F 关于 μ 的 Radon–Nikodym 导数，记作 $\frac{dF}{d\mu}$，Banach 空间 X 称为具 Radon–Nikodym 性质的空间 (RNP 空间)，如果 X 关于任何有限(完备)测度空间具 RNP。

注　可以证明 X 具 RNP 当且仅当 X 关于$([0,1], \mathscr{L}, m)$ 具 RNP (参见参考书(D–U–1)或(俞–1)，故以后我们往往限制讨论 X 关于$([0,1], \mathscr{L}, m)$的 RNP。

下面我们利用 Martingale 和 L_1 上算子表示理论来研究 RNP。

§2　Banach 空间值的鞅及停时

首先，我们讨论条件期望。

定义 2.2.1　设(Ω, Σ, μ)是有限完备测度空间。令 Σ_1 是Σ

的子 σ 代数，$f\in L_1(\mu,X)$. $g\in L_1(\mu,X)$ 称为 f 关于 Σ_1 的条件期望，如果 g 是 Σ_1 可测的，且

$$\int_E g d\mu=\int_E f d\mu,\quad \forall E\in\Sigma_1.$$

此时记 $g=E(f|\Sigma_1)$。

注 1　如果 $g=E(f|\Sigma_1)$ 存在，则它是 a.e 确定的。事实上，若 g' 也是 f 关于 Σ_1 的条件期望，则

$$G(E)=\int_E(g-g')d\mu=0,\quad \forall E\in\Sigma_1,$$

从而

$$0=|G|(E)=\int_E\|g-g_1\|d\mu,\ \forall E\in\Sigma,$$

故 $g=g'$, a.e. □

注 2　如果 $X=R^1$ 或 X 具 RNP，则 $E(f|\Sigma_1)$ 总存在。事实上，由于

$$F(E)=\int_E f d\mu,\ \forall E\in\Sigma_1$$

是 $(\Omega,\Sigma_1,\mu|_{\Sigma_1})$ 上有界变差 $\mu|_{\Sigma_1}$ 连续向量测度，从而 F 具 RN 导数 g，显然 g 即为所求。但是，仔细分析条件期望性质可知，对任何 Banach 空间 X, $E(f|\Sigma_1)$ 总存在。□

首先我们对实值条件期望的一些性质进行讨论。

定理 2.2.1　令 $E(\cdot|\Sigma_1)$: $L_1(\mu)\to L_1(\mu)$ 是条件期望算子，则

(1) $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是范数为 1 的线性投影，其值域是 $L_1(\Omega,\Sigma_1,\mu|_{\Sigma_1})$;

(2) $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是正算子，即如果 $f\geqslant 0, f\in L_1(\mu)$，则

$$E(f|\Sigma_1)\geqslant 0;$$

(3) 若 Σ_2 是 Σ_1 的子 σ 代数，则

$$E(E(f|\Sigma_1)|\Sigma_2)=E(f|\Sigma_1),\ \forall f\in L_1(\mu);$$

(4) $E(c|\Sigma_1)=c$, c 为常数;

(5) $E(fg|\Sigma_1)=g\cdot E(f|\Sigma_1), \forall f,g\in L_1(\mu)$、$g$ 是 Σ_1 可测，且

对 $f \cdot g \in L_1(\mu)$；

(6) $\int_\Omega fE(g|\Sigma_1)d\mu = \int_\Omega gE(f|\Sigma_1)d\mu$，$\forall f, g \in L_1(\mu)$；

(7) 对 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$\|E(f|\Sigma_1)\|_p \leqslant \|f\|_p$，$\forall f \in L_p(\mu)$。

证明 (1) 显然 $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是线性的。由于 $E(f|\Sigma_1)$ 是 Σ_1 可测的，故 $E(E(f|\Sigma_1)|\Sigma_1) = E(f|\Sigma_1)$，即 $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是幂等的。

令

$$F(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \Sigma, \quad G = F|_{\Sigma_1},$$

则

$$G(E) = \int_E E(f|\Sigma_1)d\mu, \quad \forall E \in \Sigma_1,$$

$$|G|(E) \leqslant |F|(G), \quad \forall E \in \Sigma_1,$$

故由定理 2.1.5 知

$$\|E(f|\Sigma_1)\|_1 = \int_\Omega |E(f|\Sigma_1)|d\mu = |G|(\Omega) \leqslant |F|(\Omega)$$

$$= \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1.$$

故 $\|E\|(\cdot|\Sigma_1)\|_1 \leqslant 1$。并且，如果 $f \in L_1(\mu)$，f 是 Σ_1 可测的，则 $f = E(f|\Sigma_1)$，从而 $\|E(\cdot|\Sigma_1)\| = 1$。这就证明了 $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是范数为 1 的投影，且其值域为 $L_1(\Omega, \Sigma_1, \mu|_{\Sigma_1})$。证毕。

(2) 若 f 是简单函数，且 $f \geqslant 0$，显然 $E(f|\Sigma_1) \geqslant 0$，由于简单函数在 $L_1(\mu)$ 中稠，且由 (1) $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是有界线性算子，故

$$E(\cdot|\Sigma_1)$$

是正算子。证毕。

(3) 设 $f \in L_1(\mu)$，$\Sigma_2 \subset \Sigma_1$，对任何 $E \in \Sigma_2$，有 $E \in \Sigma_1$，故

$$\int_E E(E(f|\Sigma_1)|\Sigma_2)d\mu = \int_E E(f|\Sigma_1)d\mu = \int_E f d\mu,$$

由定义 2.2.1 注 1 知，$E(E(f|\Sigma_1)|\Sigma_2) = E(f|\Sigma_2)$。证毕。

(4) 显然。

(5) 设 $f \in L_1(\mu)$。首先对任 $B \in \Sigma_1, A \in \Sigma_1$，

$$\int_A f\chi_B d\mu = \int_{A\cap B} f d\mu = \int_{A\cap B} E(f|\Sigma_1)d\mu = \int_A \chi_B E(f|\Sigma_1)d\mu$$

故

$$E(f\chi_B|\Sigma_1) = \chi_B E(f|\Sigma_1),\ \forall B\in\Sigma_1.$$

因此，对一切 Σ_1 可测的简单函数 g，有

$$E(fg|\Sigma_1) = gE(f|\Sigma_1).$$

利用简单函数在 $L_1(\Omega,\Sigma_1,\mu|_{\Sigma_1})$ 中稠，即知

$$E(fg|\Sigma_1) = gE(f|\Sigma_1),\forall g\in L_1(\Omega,\Sigma_1,\mu|_{\Sigma_1}).$$

证毕

(6) 设 f、$g\in L_1(\mu)$，根据(5)及 $E(f|\Sigma_1)$、$E(g|\Sigma_1)$ 是 Σ_1 可测的，所以

$$\begin{aligned}\int_\Omega fE(g|\Sigma_1)d\mu &= \int_\Omega E(fE(g|\Sigma_1)|\Sigma_1)d\mu\\ &= \int_\Omega E(f|\Sigma_1)E(g|\Sigma_1)d\mu\\ &= \int_\Omega E(gE(f|\Sigma_1)|\Sigma_1)d\mu\\ &= \int_\Omega gE(f|\Sigma_1)d\mu.\end{aligned}$$

证毕。

(7) 对 $p=+\infty$ 显然成立。对 $1\leqslant p<+\infty$，证明依赖于下面更一般的 Jensen 不等式(下面取$q(t)=|t|^p$，即得所要结果)。证毕。

引理 2.2.2 (Jensen 不等式) 设 $q:(a,b)\to R^1$，是连续凸函数。$f:\Omega\to(a,b)$，$f\in L_1(\mu)$，使 $q\circ f\in L_1(\mu)$，且 Σ_1 是 X 的子σ代数，则

$$q(E(f|\Sigma_1))\leqslant E(q\circ f|\Sigma_1),\ \mu\ \text{a.e.}$$

证明 由定理 2.2.1(2)、(4)，$a<E(f|\Sigma_1)<b$，故不等式左边有意义。由于凸函数可写成仿射函数列的上确界，选 $\alpha_n,\beta_n\in R^1$，$n=1,2,\cdots$。使

$$q(t)=\sup_{n\in N}(\alpha_n t+\beta_n),\quad \forall t\in(a,b).$$

故对任何 n,

$$\alpha_n f(\omega)+\beta_n\leqslant q(f(\omega)),\quad \forall\omega\in\Omega.$$

由定理 2.2.1 知,

$$\begin{aligned}\alpha_n E(f|\Sigma_1)+\beta_n&=E(\alpha_n f(\omega)+\beta_n|\Sigma_1)\\&\leqslant E(q(f(\omega))|\Sigma_1),\quad \mu\ \text{a.e.}\end{aligned}$$

故存在 $E\in\Sigma,\mu(E)=0$,使得当 $\omega\notin E$ 时,有

$$\alpha_n E(f|\Sigma_1)+\beta_n\leqslant E(g(f)|\Sigma_1)\quad \forall n.$$

对 n 取上确界,即得

$$q(E(f|\Sigma_1))\leqslant E(q(f)|\Sigma_1).$$

证毕。

定理 2.2.3 令 X 是 Banach 空间,Σ_1 是 Σ 的子 σ 代数,则对任 $f\in L_1(\mu,X)$,$E(f|\Sigma_1)$存在,并且,如果 $f\in L_p(\mu,X)$,$1\leqslant p\leqslant+\infty$,则 $E(f|\Sigma_1)\in L_p(\mu,X)$,且

$$\|E(f|\Sigma_1)\|_p\leqslant\|f\|_p.$$

因此,$E(\cdot|\Sigma_1)$是 $L_p(\mu,X)$ 上范数为 1 的投影,其值域为$L_p(\mu,X)$中 Σ_1 可测的函数全体。

证明 (1) 先考虑 $1\leqslant p<+\infty$ 情况:

易见,对简单函数 $f=\sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}$,有

$$E(f|\Sigma_1)=E\left(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}|\Sigma_1\right)=\sum_{i=1}^n x_i E(\chi_{E_i}|\Sigma_1),$$

且

$$\begin{aligned}\|E(f|\Sigma_1)\|_p^p&=\left\|E\left(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{E_i}|\Sigma_1\right)\right\|_p^p\\&=\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n x_i E(\chi_{E_i}|\Sigma_1)\right|^p d\mu\\&\leqslant\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n|x_i|E(\chi_{E_i}|\Sigma_1)\right|^p d\mu\\&=\int\left|E\left(\sum_{i=1}^n|x_i|\chi_{E_i}|\Sigma_1\right)\right|^p d\mu\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \chi_{E_i} \right|^p d\mu$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i} \right\|_p^p = \|f\|_p^p.$$

从而，立即看出 $E(\cdot|\Sigma_1)$ 是定义在简单函数上范数 $\leqslant 1$ 的线性算子，由于简单函数在 $L_p(\mu, X)$ 中稠，故 $E(\cdot|\Sigma_1)$ 可唯一延拓为 $L_p(\mu, X)$ 上范数 $\leqslant 1$ 的线性算子. 易知，对一切 $f \in L_1(\mu, X)$，$E(f|\Sigma_1)$是 Σ_1 可测的，且 $E(f|\Sigma_1)$就是 f 关于 Σ_1 的条件期望. 于是 $E(E(f|\Sigma_1)|\Sigma_1) = E(f|\Sigma_1)$，即 $E(\cdot|\Sigma_1)$是$L_p(\mu, X)$上范数为 1 的投影，其值域为 $L_p(\mu, X)$ 中 Σ_1 可测函数全体。

(2) 对 $p = +\infty$，若 $f \in L_\infty(\mu, X)$，则 $f \in L_1(\mu, X)$，由(一)，$E(f|\Sigma_1)$存在，且 $E(f|\Sigma_1) \in L_p(\mu, X)$，$\forall 1 \leqslant p < +\infty$。故

$$\|E(f|\Sigma_1)\|_\infty = \lim_p \|E(f|\Sigma_1)\|_p \leqslant \lim_p \|f\|_p = \|f\|_\infty;$$

证毕。

现在我们可引入向量值鞅这一概念。

定义 2.2.2 令$(I;\leqslant)$是上有向的定向指标集，$(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是Σ的子 σ 代数的一个增加定向列 (net)（即如果 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$，则

$$\Sigma_{\alpha_1} \subset \Sigma_{\alpha_2}), (f_\alpha, \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I} \subset L_1(\mu, X)$$

称为适应序列，如果 f_α 是 Σ_α 可测的。此外，如果

$$E(f_\beta|\Sigma_\alpha) = f_\alpha, \text{当 } \beta \geqslant \alpha \text{ 时},$$

则$(f_\alpha, \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ 为一个(X 值) 鞅 (Martingale)。有时在不引起混淆的情况下，简记$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$为一个鞅。

注 1　如果 $f \in L_p(\mu, X)$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 Σ 的子σ代数的一个增加定向列，则易见$(E(f|\Sigma_\alpha), \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$是一个 Martingale，这样的鞅称为标准鞅. 也称为由 f 生成的关于 $(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ 的鞅. 这是鞅的一个典型例子。

定义 2.2.3 (1) 若$(f_\alpha, \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$是一个鞅，如果存在$f \in L_p(\mu, X)$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$，使

$$\lim_{\alpha\in I} \|f_\alpha - f\|_p = 0,$$

则称 $(f_\alpha, \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I} L_p(\mu, X)$ 收敛于 f。(2) 鞅 $(f_\alpha, \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ 称为 a.e 收敛于 f，如果存在 $A\in\Sigma, \mu(A)=0$，使 $f_\alpha(\omega)\to f(\omega), \forall\omega\notin A$。

有趣的是标准鞅差不多包括了所有 $L_p(\mu, X)$ 收敛鞅 $(1\leqslant p<+\infty)$。

定理 2.2.4 设 $1\leqslant p<+\infty$，$(f_\alpha, \Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $L_p(\mu, X)$ 中鞅，令

$$\Sigma_\infty = \sigma(\bigcup_{\alpha\in I}\Sigma_\alpha),$$

即 Σ_∞ 是由 $\bigcup_{\alpha\in I}\Sigma_\alpha$ 生成的 σ 代数。则 TFAE（下列等价）：

(1) $(f_\alpha)_{\alpha\in I} L_p(\mu, X)$ 收敛于某个 $f_\infty\in L_p(\mu, X)$；

(2) 存在 $f\in L_p(\mu, X)$，使 $E(f|\Sigma_\alpha)=f_\alpha, \forall\alpha\in I$。

当(1)和(2)成立时，对使(2)成立的所有 f，一定有 $E(f|\Sigma_\infty)=f_\infty$。特别地，$f_\infty$ 是 Σ_∞ 可测的。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 若 $f_\alpha \xrightarrow{L_p(\mu, X)} f_\infty$，则

$$E(f_\infty|\Sigma_\alpha)=f_\alpha, \forall\alpha\in I.$$

事实上，任意取定 $\alpha_0\in I, E\in\Sigma_{\alpha_0}$，由鞅的定义，

$$\int_E f_\alpha d\mu = \int_E f_{\alpha_0} d\mu, \quad \forall\alpha\geqslant\alpha_0, \tag{2.1}$$

由于 $f_\alpha \xrightarrow{L_p(\mu, X)} f_\infty$，故更有 $f_\alpha \xrightarrow{L_1(\mu, X)} f_\infty$，特别地，

$$\lim_\alpha \int_E f_\alpha d\mu = \int_E f_\infty d\mu. \tag{2.2}$$

结合(2.1)和(2.2)，有

$$\int_E f_{\alpha_0} d\mu = \int_E f_\infty d\mu.$$

由 E 的任意性，$E(f_\infty|\Sigma_{\alpha_0})=f_{\alpha_0}$，由 α_0 的任意性，

$$E(f_\infty|\Sigma_\alpha)=f_\alpha, \quad \forall\alpha\in I.$$

证毕。

(2) $\Longrightarrow$(1)。若 $\exists f\in L_p(\mu, X)$，使 $E(f|\Sigma_\alpha)=f_\alpha, \forall\alpha\in I$。令 $f_\infty=E(f|\Sigma_\infty)$，则由条件期望的性质（见定理 2.2.1(3)），

$$E(f_\infty|\Sigma_\alpha)=f_\alpha, \forall \alpha\in I.$$

下面证明 $f_\alpha \xrightarrow{L_p(\mu,X)} f_\infty$，任取 $\varepsilon>0$，选

$$f_\varepsilon=\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i},$$

使

$$\|f_\varepsilon-f_\infty\|_p<\frac{\varepsilon}{2},$$

且

$$(E_i)_{i=1}^{n}\subset\Sigma_{\alpha_0},$$

对某个 α_0。

显然，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，$E(f_\varepsilon|\Sigma_\alpha)=f_\varepsilon$，故当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，有

$$\begin{aligned}\|f_\alpha-f_\infty\|_p&\leqslant\|f_\alpha-f_\varepsilon\|_p+\|f_\varepsilon-f_\infty\|_p\\&=\|E(f_\infty-f_\varepsilon|\Sigma_\alpha)\|_p+\|f_\varepsilon-f_\infty\|_p\\&\leqslant 2\|f_\infty-f_\varepsilon\|_p<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $f_\alpha \xrightarrow{L_p(\mu,X)} f_\infty$。证毕。

注意，在许多问题中，我们往往仅考虑指标集为自然数集的情况，即形如 $(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的鞅。

鞅有许多好的收敛性质。例如，鞅 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 收敛，则 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 a.e 收敛。这是 $L_1(\mu,X)$ 中一般序列所不具有的（注意，Riesz 定理只告诉我们若 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 收敛则 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $(f_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 是 a.e 收敛的）。鞅的这个性质的证明依赖于一个重要不等式：极大不等式。我们将首先引入停时（Stopping time）概念。停时工具的使用，使我们得到一般用实分析方法不能直接得到的许多好结果。这也是近十几年来概率论（包括 Banach 值的概率论）中一个重要研究方法。

定义 2.2.4 若 $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Σ 的子 σ 代数的增加序列，一个函数 τ: $\Omega\longrightarrow N\cup\{+\infty\}$ 称为关于 $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个停时，如果对每个 $n\in N$，$\{\omega;\tau(\omega)=n\}\in\Sigma_n$。如果此外 τ 还是一个有界函数，称 τ 为关于 $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个有界停时。记 $T^*=\{\tau$ 是关于 $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$

的停时},$T=\{\tau$ 是关于$(\Sigma_n)_{n=1}^\infty$的有界停时}。

注 1　在 T^* 中可以引入偏序：$\tau_1\leqslant\tau_2\Longleftrightarrow\tau_1(\omega)\leqslant\tau_2(\omega)$ a.e. □

注 2　对任何自然数 n，定义 τ_n: $\Omega\longrightarrow N\cup\{+\infty\}$, $\tau_n(\omega)=n$，则 τ_n 是一个有界停时，称为常停时。今后我们也直接把n叫作常停时。这样可把 N 看作 T(或 T^*)的子集。□

定义 2.2.5　设 $\tau\in T$，定义

$$\Sigma_\tau=\{E\in\Sigma;\ E\cap(\tau=n)\in\Sigma_n,\ \forall n\}.$$

对于适应序列$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$，定义

$$f_\tau=\sum_{n=\min\tau}^{\max\tau}f_n\chi_{(\tau=n)}$$

或简写作 $f_\tau(\omega)=f_{\tau(\omega)}(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$.

注 1　容易证明 Σ_τ 是 Σ 的子 σ 代数。

我们可以证明 f_τ 是 Σ_τ 可测的，为此先证明下面引理。□

引理 2.2.5　f: $\Omega\longrightarrow X$ 是 μ 可测的当且仅当 f 具本性可分值域且 $f^{-1}(B)\in\Sigma$, $\forall$Borel 集 $B\subset X$.

证明 "$\Longrightarrow$" 由于 f 是 μ 可测的，因此存在简单函数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$，使 $f_n\longrightarrow f$, a.e. 故 f 具本性可分值域。且不妨设

$$f_n(\omega)\longrightarrow f(\omega),\ \forall\omega\in\Omega.$$

为了证明 $f^{-1}(B)\in\Sigma$, $\forall$Borel 集 $B\subset X$，只须证明 $f^{-1}(G)\in\Sigma$, $\forall$ 开集 $G\subset X$.

任取 X 中开集 G，对每个 $k\in N$，定义

$$G_k=\left\{x\in X,\ d(x,X\backslash G)>\frac{1}{k}\right\}$$

则 G_k 是开集，且$\overline{G_k}\subset G$，容易验证

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{k=1}^\infty\varliminf_n f_n^{-1}(G_k).$$

由于对每个 n,k, $f_n^{-1}(G_k)\in\Sigma$，故 $f^{-1}(G)\in\Sigma$. 证毕.

"$\Longleftarrow$" 不失一般性，设 X 是可分的。取 X 中可数稠集

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty},$$

对每个 n，令

$\varphi_n(x)=x_l$，其中$1\leqslant l\leqslant n$，且

$$\|x-x_l\|=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\|x-x_k\|,\ \|x-x_j\|>\|x-x_l\|,\quad 对\ j<l.$$

则 φ_n 取有限值，且 φ_n 在集 $B_l=\{x;\ \|x-x_l\|<\|x-x_m\|,\ 1\leqslant m<l;\ \|x-x_l\|\leqslant\|x-x_m\|,\ l\leqslant m\leqslant n\}$上取值 x_l，由于 $\|x-x_i\|$是 X 上连续函数，故 B_l 是 Borel 集，故

$$\varphi_n(f(\omega))=\sum_{l=1}^{n}x_l\chi_{(\omega;\varphi_n(f(\omega))=x_l)}.$$

是 Σ 可测的简单函数，且由于对任何 x，$\lim\limits_n\varphi_n(x)=x$，故

$$\varphi_n(f(\omega))\longrightarrow f(\omega).$$

因此 $f(\omega)$是 μ 可测的。证毕。

命题 2.2.6 f_τ 是 Σ_τ 可测的。

证明 因 $f_\tau^{-1}(B)\cap(\tau=n)=f_n^{-1}(B)\in\Sigma_n$。证毕。

下面再叙述停时的一些性质。

命题 2.2.7 设$(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Σ 的子σ 代数增加序列，

(1) τ: $\Omega\to N\cup\{+\infty\}$是关于$(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的停时，当且仅当

$$(\tau\leqslant n)\in\Sigma_n,\ \forall n.$$

(2) 若(τ_k)是关于 $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的停时的(有限或无限) 序列，则 $\inf\limits_k\tau_k$ 和 $\sup\limits_k\tau_k$ 也是停时。

(3) $\sigma,\tau\in T$，$\sigma\leqslant\tau$，则 $\Sigma_\sigma\subset\Sigma_\tau$，从而

$$E(E(f|\Sigma_\tau)|\Sigma_\sigma)=E(f|\Sigma_\sigma),\quad\forall f\in L_1(\mu,X).$$

证明 (1) 由于 $(\tau\leqslant n)=\bigcup\limits_{m\leqslant n}(\tau=m)$，$(\tau=n)=(\tau\leqslant n)\setminus(\tau\leqslant n-1)$。证毕。

(2) 因 $(\inf\limits_k\tau_k\leqslant n)=\bigcup\limits_k(\tau_k\leqslant n)$，$(\sup\limits_k\tau_k\leqslant n)=\bigcap\limits_k(\tau_k\leqslant n)$。证毕。

(3) 固定 $E\in\Sigma_\sigma$，及 $n\in N$，由于 $\sigma\leqslant\tau$，从而

$$E\cap(\tau=n)=(E\cap(\sigma\leqslant n)\cap(\tau=n)$$
$$=\bigcup_{m=1}^{n}(E\cap(\sigma=m))\cap(\tau=n)\in\Sigma_n.$$

证毕。

设$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$是适应序列，$B$是$X$的 Borel 子集，

令 $$\tau_B(\omega)=\begin{cases}\min\{n\in N;f_n(\omega)\in B\}, & 若\omega\in\bigcup_{n\in N}(f_n\in B)\\ +\infty, & 其它。\end{cases}$$

则易见τ_B是关于$(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$的停时。这个停时的意义是很明显的，即"首先进入$B$的时间"也称首中时。

鞅关于停时有很好的性质，即下面的随机样本定理。

定理 2.2.8 若$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$是一个鞅，若$\sigma$、$\tau\in T$，$\sigma\leqslant\tau$，则

(1)（随机样本定理）$E(f_\tau|\Sigma_\sigma)=f_\sigma$；

(2) $\|f_\sigma\|\leqslant E(\|f_\tau\||\Sigma_\sigma)$。

证明 (1) 固定$A\in\Sigma_\sigma$，

$$\int_A f_\sigma d\mu=\int_A\sum_{n=\min\sigma}^{\max\sigma}f_n\chi_{(\sigma=n)}\,d\mu=\sum_{n=\min\sigma}^{\max\sigma}\int_{A\cap(\sigma=n)}f_n d\mu$$
$$=\sum_{n=\min\sigma}^{\max\sigma}\int_{A\cap(\sigma=n)}f_{\max\sigma}\,d\mu=\sum_{n=\min\sigma}^{\max\sigma}\int_{A\cap(\sigma=n)}f_{\max\tau}d\mu$$
$$=\int_A f_{\max\tau}\,d\mu=\sum_{n=\min\tau}^{\max\tau}\int_{A\cap(\tau=n)}f_{\max\tau}\,d\mu$$
$$=\sum_{n=\min\tau}^{\max\tau}\int_{A\cap(\tau=n)}f_n d\mu=\int_A f_\tau d\mu.$$

证毕。

(2) 由(1)，任取$A\in\Sigma_\sigma$，则

$$\int_A\|f_\sigma\|d\mu=\int_A\|E(f_\tau|\Sigma_\sigma)\|\,d\mu\leqslant\int_A\|f_\tau\|d\mu$$

证毕。

注 1 由这个定理，若$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$是鞅，则$(f_\tau,\Sigma_\tau)$ $\tau\in T$也是鞅。且若$(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$是T中增加序列，则$(f_{\tau_n},\Sigma_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$也是鞅，特别地，若$\sigma\in T^*$，则$(f_{n\wedge\sigma},\Sigma_{n\wedge\sigma})$是鞅。□

注 2 若X是 Banach 格，适应定向列$(f_\alpha,\Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$满足$f_\sigma\leqslant$

$E(f_\beta|\Sigma_\alpha)$，当$\alpha\leqslant\beta$时，称为一个下鞅(submartingale)，这个定理说，若$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$是一个鞅，则$(\|f_n\|,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$是实值下鞅。□

下面我们证明重要的极大不等式。

定理 2.2.9 （极大不等式） (1) 设$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$是适应序列，则对每个$\lambda>0$，

$$\mu(\sup_n\|f_n\|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_{\tau\in T}\int_\alpha\|f_\tau\|d\mu.$$

(2) 若$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$是一个鞅，则对每个$\lambda>0$，

$$\mu(\sup_n\|f_n\|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_n\int_\alpha\|f_n\|d\mu.$$

(3) 若$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$是一个标准鞅，即存在$f\in L_1(\mu,X)$，使

$$E(f|\Sigma_n)=f_n,\quad\forall n,$$

则

$$\mu(\sup_n\|f_n\|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_\alpha\|f\|d\mu.$$

证明 (1) 令$E_n=(\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\|f_k\|>\lambda)$，则$E_n\subset E_{n+1}$，且

$$\lim_n E_n=(\sup_n\|f_n\|>\lambda),$$

故$\lim\limits_n\mu(E_n)=\mu(\sup\limits_n\|f_n\|>\lambda)$，故只须证对任何$n$，有

$$\mu(E_n)\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_{\tau\in T}\int_\alpha\|f_\tau\|d\mu. \tag{2.3}$$

为了证明(2.3)，定义停时σ，

$$\sigma(\omega)=\begin{cases}\min\{k;1\leqslant k\leqslant n,\|f_k(\omega)\|>\lambda\}, & \text{当 }\omega\in E_n\text{ 时}\\ n, & \text{当 }\omega\notin E_n\text{ 时}\end{cases}$$

（易见σ是停时），

$$\lambda\mu(E_n)<\int_{E_n}\|f_\sigma\|d\mu\leqslant\int_\Omega\|f_\sigma\|d\mu\leqslant\sup_{\tau\in T}\int_\Omega\|f_\tau\|d\mu.$$

证毕。

(2) 若$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$是鞅，则对每个$\tau\in T$，$\tau\leqslant\max\tau$，由定理2.2.8(2)知，

$$\int_\Omega \|f_\tau\| d\mu \leqslant \int_\Omega E(\|f_{\max\tau}\| \mid \Sigma_\tau) d\mu$$
$$= \int_\Omega \|f_{\max\tau}\| d\mu \leqslant \sup_n \int_\Omega \|f_n\| d\mu,$$

利用(1)，即得所要结果。证毕。

(3) 若 $f_n = E(f \mid \Sigma_n)$，对某个 $f \in L_1(\mu, X)$，则由定理 2.2.3 知，

$$\int_\Omega \|f_n\| d\mu = \int_\Omega \|E(f \mid \Sigma_n)\| d\mu \leqslant \int_\Omega \|f\| d\mu.$$

利用(2)，即得所要结果。证毕。

定理 2.2.10 若 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是鞅，则 $(f_n)_{n=1}^\infty$ $L_1(\mu, X)$ 收敛推出 $(f_n)_{n=1}^\infty$ a.e 收敛。

证明 若 (f_n) $L_1(\mu、X)$收敛，由定理 2.2.4，存在 $f \in L_1(\mu, X)$ 使 f 是 $\Sigma_\infty = \sigma(\bigcup_n \Sigma_n)$ 可测的，且

$$f_n = E(f \mid \Sigma_n), \forall n.$$

对每个 $\varepsilon > 0$，令

$$A_k(\varepsilon) = (\sup_{n,m \geqslant k} \|f_n - f_m\| > \varepsilon),$$

则 $(f_n)_{n=1}^\infty$ 是 a.e 收敛的当且仅当

$$\lim_k \mu(A_k(\varepsilon)) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

对任何 $\varepsilon > 0$，取 $\delta > 0$ 及 $\bigcup_n \Sigma_n$ 可测的简单函数 g，使

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

令 k_0 是正整数，使 g 是 Σ_{k_0} 可测的，当 $k \geqslant k_0$ 时，$E(g \mid \Sigma_k) = g$，当 $n, m \geqslant k_0$ 时，

$$f_n - f_m = E(f \mid \Sigma_n) - E(f \mid \Sigma_m)$$
$$= E(f - g \mid \Sigma_n) - E(f - g \mid \Sigma_m),$$

故

$$\sup_{n,m \geqslant k_0} \|f_n - f_m\| \leqslant 2 \sup_{n \in N} \|E(f - g \mid \Sigma_n)\|.$$

由极大不等式（定理 2.2.9），有

$$\mu(A_{k_0}(\varepsilon)) = \mu(\sup_{n,m\geqslant k_0}\|f_n - f_m\| > \varepsilon)$$

$$\leqslant \mu\left(\sup_{n\in N}\|E(f-g|\Sigma_n)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|f-g\|_1 \leqslant \delta.$$

由 $A_{k+1}(\varepsilon)\subset A_k(\varepsilon)$，即知(2.4)成立。证毕。

§3 $L_1(\mu)$ 到 X 的有界线性算子

我们仍然考虑有限完备测度空间(Ω,Σ,μ)。容易看到 $L_1(\mu)$ 的共轭空间是 $L^1(\mu)^*\simeq L_\infty(\mu)$。如果我们不仅考虑 $L_1(\mu)$上的有界线性泛函，而考虑 $L_1(\mu)$ 到任何 Banach 空间 X 的有界线性算子全体 $L(L_1(\mu),X)$，那么是否仍有$L(L_1(\mu),X)\simeq L_\infty(\mu,X)$ 呢？现在已经知道，这取决于 Banach 空间 X 的性质，并且恰好当X具 RNP 时等式成立。本节就讨论这方面的问题。此外，我们发现，有界线性算子 $T: L_1(\mu)\longrightarrow X$ 与向量测度 $G:\Sigma\longrightarrow X$，以及 X 值鞅$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 有密切联系。

定义 2.3.1 $T\in L(L_1(\mu), X)$ 称为可表示的，如果存在 $g\in L_\infty(\mu,X)$使

$$Tf=\int_\Omega fg\,d\mu,\ \forall f\in L_1(\mu).$$

记可表示算子全体为 $R(L_1(\mu),X)$。

引理 2.3.1 若 $T\in L(L_1(\mu),X)$，令

$$G(E)=T(\chi_E),\ \forall E\in\Sigma,$$

则

$$T\in R(L_1(\mu),X)\Longleftrightarrow G \text{ 具 RN 导数 } \frac{dG}{d\mu}, \text{ 且此时}$$

$$\|T\|=\left\|\frac{dG}{d\mu}\right\|_\infty.$$

证明 "$\Longrightarrow$" 若 $T\in R(L_1(\mu),X)$，则 $\exists g\in L_\infty(\mu,X)$，使

$$Tf=\int_\Omega fg\,d\mu,\quad \forall f\in L_1(\mu).$$

特别地

$$G(E)=T(\chi_E)=\int_E g\,d\mu,\quad \forall E\in\Sigma,$$

故

$$g=\frac{dG}{d\mu}.$$

"$\Longleftarrow$" 若 G 具 RN 导数，则 $\exists g\in L_1(\mu,X)$，使

$$T(\chi_E)=G(E)=\int_E g\,d\mu,\quad \forall E\in\Sigma.$$

对任何简单函数

$$f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i},$$

有

$$T(f)=T\left(\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\right)=\sum_{i=1}^n a_iG(E_i)$$

$$=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\right)g\,d\mu=\int_\Omega fg\,d\mu$$

且

$$\|G(E)\|=\left\|\int_E g\,d\mu\right\|=\|T(\chi_E)\|\leqslant\|T\|\cdot\mu(E),\quad \forall E\in\Sigma.$$

故

$$\int_E\|g\|d\mu=|G|(E)\leqslant\|T\|\mu(E),\quad \forall E\in\Sigma,$$

从而

$$g\in L_\infty(\mu,X),$$

且

$$\|g\|_\infty\leqslant\|T\|.$$

因此，对简单函数

$$f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i},$$

$$\left\|\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\right)g\,d\mu\right\|\leqslant\|g\|_\infty\left\|\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}\right\|,$$

于是$\int_\Omega(\cdot g)d\mu$ 可延拓为 $L_1(\mu)$到 X 的有界线性算子 T_g,使

$$\|T_g\|\leqslant\|g\|_\infty.$$

由(2.5),T_g 与 T 在简单函数上一致,故 $T_g=T$, 即

$$T(f)=T_g(f)=\int_\Omega fg\,d\mu,\quad\forall f\in L_1(\mu),$$

且 $\|T\|=\|T_g\|\leqslant\|g\|_\infty$,因此,$\|T\|=\|g\|_\infty$. 证毕.

定理 2.3.2 设(Ω,Σ,μ) 为有限完备测度空间,则 X 关于(Ω,Σ,μ)具 RNP 当且仅当 $L(L_1(\mu),X)=R(L_1(\mu),X)$.

证明 "$\Longleftarrow$" 任取有界变差 μ 连续的向量测度 $G:\Sigma\to X$, 则易见 G 的全变差 $|G|$ 也是 μ 连续的数值测度,根据纯量测度的 Hahn 分解定理,存在 Σ 中不相交的序列$(E_n)_{n=1}^\infty$, 使 $\Omega=\bigcup_{n=1}^\infty E_n$,且

$$(n-1)\mu(E)\leqslant|G|(E)\leqslant n\mu(E),\forall E\in\Sigma,E\subset E_n.\ \forall n.$$

对固定 n,定义算子 T_n: $L_1(\mu)\to X$ 如下:首先对 $L_1(\mu)$ 中简单函数

$$f=\sum_{i=1}^p a_i\chi_{A_i},$$

定义

$$T_n(f)=\sum_{i=1}^p a_iG(E_n\cap A_i),$$

则

$$\begin{aligned}\|T_n(f)\|&=\left\|\sum_{i=1}^p a_iG(E_n\cap A_i)\right\|\\&\leqslant\sum_{i=1}^p|a_i|\,|G|(E_n\cap A_i)|\\&\leqslant\sum_{i=1}^p|a_i|\,n\mu(E_n\cap A_i)\\&\leqslant n\|f\|_1,\end{aligned}$$

故 T_n 可唯一延拓为 $L_1(\mu)$ 到 X 的有界线性算子。

由于 $T_n \in L(L_1(\mu), X) = R(L_1(\mu), X)$，故存在

$$g_n \in L_\infty(\mu, X)$$

使

$$T_n(f) = \int_\Omega f g_n d\mu, \quad \forall f \in L_1(\mu).$$

特别地，如果 $E \in \Sigma$，则

$$G(E \cap E_n) = T_n(\chi_E) = \int_E g_n d\mu,$$

于是对每个 n，得到 $g_n \in L_\infty(\mu, X)$，使

$$G(E \cap E_n) = \int_E g_n d\mu, \quad \forall E \in \Sigma.$$

定义 $g: \Omega \longrightarrow X, g(\omega) = g_n(\omega)$，当 $\omega \in E_n$ 时，由于 G 是可数可加的，故

$$G(E) = \lim_m G\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right)\right) = \lim_m \int_{E \cap \left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right)} g d\mu,$$

由于 G 是有界变差的，故

$$\int_{\bigcup_{n=1}^m E_n} \|g\| d\mu \leqslant |G|(\Omega),$$

因此，根据单调收敛定理，$\|g\| \in L_1(\mu)$，应用 Lebesgue 控制收敛定理，得到

$$G(E) = \lim_m \int_{E_n\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right)} g\, d\mu = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \Sigma.$$

即 $\frac{dG}{d\mu} = g$。证毕。

"$\Longrightarrow$" 设 $T \in L(L_1(\mu), X)$，令 $G(E) = T(\chi_E), \forall E \in \Sigma$，由于 $\|G(E)\| \leqslant \|T\| \mu(E)$，故 G 是有界变差 μ 连续的向量测度。由假设 $\frac{dG}{d\mu}$ 存在，根据引理 2.3.1 即知 $T \in R(L_1(\mu), X)$。证毕。

定理 2.3.3 X 具 RNP 当且仅当 $L(L_1(\mu), X) = R(L_1(\mu),$

X)，$\forall$ 有限完备测度空间(Ω,Σ,μ)。

证明　由定理 2.3.2 即得。下面我们再给出一个简单的关于充分性的直接证明。

任取有限完备测度空间 (Ω,Σ,μ) 及有界变差 μ 连续向量测度 G: $\Sigma\longrightarrow X$，则易见 G 的全变差 $|G|$ 也是 μ 连续的数值测度，由数值测度的 Radon-Nikodym 定理，$\frac{d|G|}{d\mu}$ 存在，下面证明 $\frac{dG}{d|G|}$ 存在，则从 $\frac{dG}{d\mu}=\frac{dG}{d|G|}$、$\frac{d\|G\|}{d\mu}$ 知 $\frac{dG}{d\mu}$ 存在，这表明 X 具 RNP。

显然，$\|G(E)\|\leqslant|G|(E)$，$\forall E\in\Sigma$。

令

$$T(f)=T\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}\Big)=\sum_{i=1}^{n}a_iG(E_i),$$

其中

$$f=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i},$$

为简单函数，则

$$\Big\|T\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}\Big)\Big\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|\,|G|(E_i)=\Big\|\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}\Big\|_{L_1(|G|)}.$$

故 T 可延拓为 $L_1(|G|)$到 X 的有界线性算子（仍记作 T）。且$\|T\|\leqslant1$，由于 $L(L_1(|G|),X)=R(L_1(|G|),X)$，由引理2.3.1 知$\frac{dG}{d|G|}$存在．证毕。

注　前面已经提到 X 具 RNP 当且仅当 X关于$([0,1],\mathscr{L},m)$具 RNP，故实际上定理 2.3.3 就是说：X 具 RNP 当且仅当 $L(L_1,X)=R(L_1,X)$。□

下面，我们将 $T\in L(L_1(\mu),X)$与 X 值鞅联系起来。

定义 2.3.3　X 值的鞅$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为一致有界的，如果

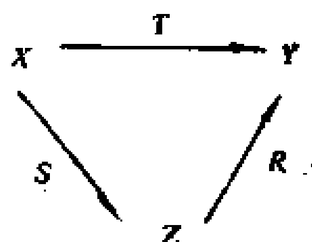
$$\sup_n\|f_n\|_\infty<+\infty.$$

X 值鞅 $(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为 Pettis-Cauchy 的，如果对任 $\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$ 时，有 $\|f_n-f_m\|_{P_e}<\varepsilon$，其中

$$\|f\|_{P_e}=\sup\left\{\int_{\Omega}|x^*(f(\omega))|d\mu;\ \|x^*\|\leqslant 1, x^*\in X^*\right\}$$

称为 Pettis 范数。

定义 2.3.4 $T\in L(X,Y)$ 称为因子分解通过 Banach 空间 Z，如果存在 $S\in L(X,Z)$，$R\in L(Z,Y)$，使 $T=RS$，即右边的交换图成立。



现在，我们建立线性算子与鞅的联系。

任给 $T\in L(L_1(\mu),X)$，对 Ω 的任何分割 $\pi=\{E_1,\cdots,E_n\}$ 令

$$\xi_\pi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{T(\chi_{E_i})}{\mu(E_i)}\chi_{E_i}.$$

$\left(\text{注：当 } \mu(E_i)=0 \text{ 时，约定} \frac{T(\chi_{E_i})}{\mu(E_i)}=\frac{0}{0}=0\right)$

分割 π 全体构成一个定向指标集，则易见 $(\xi_\pi,\sigma(\pi))_\pi$ 是一个鞅，其中 $\sigma(\pi)$ 表示由 π 生成的 σ 代数。且

$$\sup_{\pi}\|\xi_\pi\|_\infty\leqslant\|T\|.$$

$$Tf=\lim_{\pi}\int_{\Omega}\xi_\pi(\omega)f(\omega)d\mu,\quad \forall f\in L_1(\mu).$$

反之，任何一个 X 值一致有界鞅 $(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$，令

$$Tf=\lim_{n}\int_{\Omega}f(\omega)f_n(\omega)d\mu,\quad \forall f\in L_1(\mu),$$

f 是 $\Sigma_\infty=\sigma(\bigcup_n\Sigma_n)$ 可测的，则容易看到，$T\in L(L_1(\Omega,\Sigma_\infty,\mu),X)$。

下面，我们先列出表格，使读者清楚地了解它们之间关系，然后逐一加以证明。

注 我们还有如下的集合包含关系：

$K(L_1(\mu),X)\subset WK(L_1(\mu),X)\subset R(L_1(\mu),X)\subset DP(L_1(\mu),X)\subset L(L_1(\mu),X)$。□

T: $L_1(\mu)\to X$	相应鞅(ξ_π)	因　子　分　解
有界(线性算子)	一致有界(见前说明)	
DP 算子	$\|\cdot\|_P$, Cauchy(定理2.3.22)	
可表示算子	$L_1(\mu,X)$收敛(定理2.3.5)	通过l_1,通过RNP空间(定理2.3.10)
w紧算子		通过自反空间(定理2.3.15)
紧算子	$L_\infty(\mu,X)$收敛(定理2.3.17)	通过c_0子空间(定理2.3.19)

下面逐一进行讨论。

引理 2.3.4　设 $\pi=\{E_1,\cdots,E_n\}$是 Ω 的一个分割，令

$$E_\pi(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_{E_i}fd\mu}{\mu(E_i)}\chi_{E_i},\quad \forall f\in L_1(\mu,X)$$

$\left(\text{约定}\ \frac{0}{0}=0\right)$，则

(1) E_π: $L_1(\mu,X)\longrightarrow L_1(\mu,X)$是压缩(即范数$\leqslant 1$的)线性算子；

(2) E_π: $L_\infty(\mu,X)\longrightarrow L_\infty(\mu,X)$也是压缩线性算子；

(3) $\lim\limits_{\pi}\|E_\pi(f)-f\|_1=0$, $\forall f\in L_1(\mu,X)$；

(4) $\lim\limits_{\pi}\|E_\pi(f)-f\|_\infty=0$, $\forall f\in L_\infty(\mu,X)$，且 f 具相对范紧值域。

证明 (1)

$$\|E_\pi(f)\|_1=\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_{E_i}fd\mu}{\mu(E_i)}\chi_{E_i}\right\|_1$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i}\|f\|d\mu=\int_\Omega\|f\|d\mu=\|f\|_1.$$

证毕。

(2) $\|E_\pi(f)\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|\frac{\int_{E_i}fd\mu}{\mu(E_i)}\right\|\leqslant\|f\|_\infty$. 证毕。

(3) 对简单函数 $f=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}$，当 $\pi>\pi_0=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 时，显然有 $\|E_\pi(f)-f\|_1=0$，由于简单函数在 $L_1(\mu,X)$ 中稠，故(3)成立。证毕。

(4) 同(3)证明相类似，且易见简单函数在 $L_\infty(\mu,X)$ 中具相对范紧值域的全体函数中稠。证毕。

定理 2.3.5 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) $T\in R(L_1(\mu),X)$

(2) T 相应的鞅 $(\xi_\pi,\sigma(\pi))$ 是 $L_1(\mu,X)$ 收敛的。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由于 $T\in R(L_1(\mu),X)$，故存在

$$g\in L_\infty(\mu,X),$$

使

$$Tf=\int_\Omega fg\,d\mu,\ \forall f\in L_1(\mu).$$

从而

$$\lim_\pi\int_E\xi_\pi\,d\mu=T(\chi_E)=\int_E g\,d\mu,\ \ \forall E\in\Sigma.$$

任意取定 π_0，当 $\pi>\pi_0$ 时，

$$\int_E\xi_{\pi_0}d\mu=\int_E\xi_{\pi}d\mu,\ \ \forall E\in\pi_0.$$

(注：$\pi>\pi_0$ 意味着对任 $E\in\pi_0$，存在 $A_1,\ \cdots,\ A_n\in\pi$，使 $E=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$)。因此，$\int_E\xi_{\pi_0}d\mu=\int_E g\,d\mu,\forall E\in\pi_0$，即 $E(g|\sigma(\pi_0))=\xi_{\pi_0}$。由 π_0 的任意性，得 $E(g|\sigma(\pi))=\xi_\pi,\ \forall\pi$。由于

$$\Sigma=\sigma(\bigcup_\pi\sigma(\pi)),$$

故对任 $\varepsilon>0$，可选

$$g_\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i},$$

其中 $E_i\in\sigma(\pi_1)$，对某个 π_1，使

$$\|g-g_\varepsilon\|_1<\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $\pi > \pi_1$ 时，

$$\|\xi_\pi - g\|_1 \leqslant \|\xi_\pi - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - g\|_1$$
$$= \|E(g - g_\varepsilon | \sigma(\pi_1))\|_1 + \|g_\varepsilon - g\|_1$$
$$\leqslant 2\|g - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

这表明 $\|\xi_\pi - g\|_{L_1(\mu, X)} \longrightarrow 0$，证毕。

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 $\|\xi_\pi - g\|_1 \longrightarrow 0$，则可选增加子列 $(\pi_n)_{n=1}^\infty$，使 $\|\xi_{\pi_n} - g\|_1 \longrightarrow 0$，由于 $(\xi_{\pi_n}, \sigma(\pi_n))_{n=1}^\infty$ 是一个鞅，故由极大不等式（定理 2.2.10）知，$\xi_{\pi_n} \xrightarrow{a.e} g$，因 $\sup\limits_\pi \|\xi_\pi\|_\infty \leqslant \|T\|$，故 $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$，特别地，$g \in L_\infty(\mu, X)$。

显然，对任何简单函数 $f \in L_1(\mu)$，有

$$Tf = \lim_\pi \int f\xi_\pi d\mu = \int_\Omega fg d\mu.$$

令

$$T_g f = \int_\Omega fg d\mu, \quad \forall f \in L_1(\mu),$$

则 $T_g \in L(L_1(\mu), X)$，且 T_g 与 T 在简单函数上相等故 $T = T_g$，即 T 是可表示算子，证毕。

注　对 $T \in L(L_1, X)$，我们可构造鞅 $(\xi_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 与 T 相对应：设 Σ_n 是由 $I_{n,k} = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$，$k = 1, \cdots, 2^n$ 生成的 $[0,1]$ 的子集的 σ 代数，令

$$\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{T(\chi_{I_{n,k}})}{\mu(I_{n,k})} \chi_{I_{n,k}}.$$

那么由定理可得 $T \in R(L_1, X)$，当且仅当 T 相应的鞅 $(\xi_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 $L_1(m, X)$ 收敛的，当且仅当 T 相应的鞅 $(\xi_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 a·e 收敛的（因为这时 $(\xi_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是"序列型"鞅）。 □

定理 2.3.6　设 X 是 Banach 空间，则 $TFAE$

(1) X 具 RNP；

(2) 每个 X 值一致有界鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 $L_1(\mu, X)$ 收敛；

(3) 每个 X 值一致有界鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 a·e 收敛。

证明 (2)与(3)等价从定理 2.2.10 得到。

(1)$\Longrightarrow$(2) 由于每个 X 值一致有界鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 对应一个有界线性算子，由定理 2.3.3 及定理 2.3.5 即知。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(1) 若 X 不具 RNP，则存在有限完备测度空间 (Ω, Σ, μ) 及 $T \in L(L_1(\mu), X) \backslash R(L_1(\mu), X)$，由定理 2.3.5 知 T 相应的一致有界鞅 $(\xi_\pi, \sigma(\pi))_\pi$ 不是 $L_1(\mu, X)$ 收敛，则存在 $\varepsilon > 0$，对每个分割 π，存在 $\pi_1, \pi_2 \geqslant \pi$，使 $\|\xi_{\pi_1} - \xi_{\pi_2}\|_1 > 2\varepsilon$，则

$$\|\xi_{\pi_1} - \xi_\pi\|_1 \text{ 与 } \|\xi_{\pi_2} - \xi_\pi\|_1$$

中之一大于 ε，因此，我们得到对每个 π，存在 π'，使

$$\|\xi_\pi - \xi_{\pi'}\|_1 > \varepsilon,$$

这样就可归纳构造增加的分割序列 $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $(\xi_{\pi_n}, \sigma(\pi_n))_{n=1}^{\infty}$ 不是 $L_1(\mu, X)$ 收敛的，但 $(\xi_{\pi_n}, \sigma(\pi_n))_{n=1}^{\infty}$ 是 X 值一致有界鞅，矛盾。证毕。

注 由于一致有界鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 的值域是含于 X 的可分子空间中，故由这个定理立即得到 X 具 RNP 当且仅当 X 的每个可分子空间具 RNP。□

X 具 RNP 不仅使一致有界鞅是 $L_1(\mu, X)$ 收敛的，而且还可使更广一类鞅也是收敛的。我们引入如下定义。在第一章中，我们已经对 L_1 中子集给出过类似的定义（见定义 1.3.3 及定义 1.3.4）。

定义 2.3.5 $A \subset L_1(\mu, X)$ 称为等度连续，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $E \in \Sigma$，$\mu(E) < \delta$，则有

$$\sup\left\{\int_E \|f\| d\mu;\ f \in A\right\} < \varepsilon.$$

定义 2.3.6 $A \subset L_1(\mu, X)$ 称为一致可积的，如果

$$\lim_{a \to +\infty} \sup\left\{\int_{(\|f\| > a)} \|f\| d\mu;\ f \in A\right\} = 0.$$

与定理 1.3.15、定理 1.3.16 及定理 1.3.17 完全类似可得下面定理。

定理 2.3.7 设 (Ω,Σ,μ) 是有限（完备）测度空间，X 是 Banach 空间，则

(1) $L_1(\mu)$的子集 A 是相对 w 紧的，当且仅当 A 是范数有界且等度连续的，当且仅当 A 是一致可积的，

(2) $L_1(\mu,X)$的子集 A 是一致可积的，当且仅当 A 是范数有界且等度连续的。

注 关于$L_1(\mu, X)$ 中集合的相对 w 紧性讨论见参考书(D-U-1, p.101)。但是尚未找到 $L_1(\mu,X)$ 中集合是相对 w 紧的特征。□

定理 2.3.8 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE:

(1) X 是 RNP 空间；

(2) 每个 X 值一致可积的鞅$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 收敛的；

(3) 每个 X 值一致可积的鞅$(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 a.e 收敛的；

(4) 每个$L_1(\mu,X)$ 有界的鞅$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 a.e 收敛的。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设$(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 值一致可积鞅，令

$$G(E)=\lim_n\int_E f_n d\mu,\quad \forall E\in\bigcup_n\Sigma_n.$$

由鞅的性质知，上述 G 存在，再由$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的知，对每个

$$E\in\sigma(\bigcup_n\Sigma_n)\equiv\Sigma_\infty,$$

$$G(E)=\lim_n\int_E f_n d\mu$$

存在，并且由$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一致可积性知，G 是有界变差 μ 连续的向量测度。因 X 具 RNP，故

$$\frac{dG}{d\mu}=f\in L_1(\mu,X)$$

存在，

$$G(E)=\int_E f d\mu,\quad \forall E\in\Sigma_\infty,$$

故对每个 n，每个 $E\in\Sigma_n$，

$$\int_E f_n d\mu = \lim_k \int_E f_k d\mu = G(E) = \int_E f d\mu,$$

从而，$E(f|\Sigma_n) = f_n$，因此，根据定理 2.2.4，$f_n \xrightarrow{L_1(\mu,X)} f$。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3)　由定理 2.2.10 即知。证毕

(3)$\Longrightarrow$(4)　设$(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$是$L_1(\mu, X)$有界的鞅。为了证明$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a.e 收敛，只须证明对每个$\varepsilon>0$，存在$E\in\Sigma$，$\mu(E)<\varepsilon$，使$(f_n)_{n=1}^{\infty}$在$\Omega\backslash E$上 a.e 收敛即可。

固定$\varepsilon>0$，由于$\sup\|f_n\|_1<+\infty$，应用极大不等式，存在$\lambda>0$，使

$$\mu(\sup_n\|f_n\|>\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup_n\|f_n\|_1<\varepsilon.$$

我们将证明在集$A=\{\omega;\ \sup_n\|f_n(\omega)\|>\lambda\}$上$f_n$ a.e 收敛。为此，我们利用停时方法，构造一个一致可积的鞅，且在A上与$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是一致的。

令　$$\tau(\omega)=\begin{cases}\min\{n;\ \|f_n(\omega)\|>\lambda\}, & 若\ \omega\in\Omega\backslash A\\ \infty, & 若\ \omega\in A.\end{cases}$$

由定理 2.2.8 知$(f_{n\wedge\tau}, \Sigma_{n\wedge\tau})_{n=1}^{\infty}$是一个鞅，并且它还是一致可积的。事实上，当$\omega\in A$时，

$$\sup_n\|f_n(\omega)\|\leqslant\lambda,$$

当$\omega\notin A$时，$\tau(\omega)<+\infty$，

$$\sup_n\|f_{n\wedge\tau}(\omega)\|=\lim_n\|f_{n\wedge\tau}(\omega)\|=\|f_\tau(\omega)\|,$$

应用 Fatou 引理有

$$\begin{aligned}\int_{(\tau<+\infty)}\sup_n\|f_{n\wedge\tau}(\omega)\|d\mu &= \int_{(\tau<+\infty)}\lim_n\|f_{n\wedge\tau}(\omega)\|d\mu\\ &\leqslant \varliminf_n\int_\Omega\|f_{n>\tau}(\omega)\|d\mu\\ &\leqslant \sup_n\int_\Omega\|f_n(\omega)\|d\mu<+\infty,\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \sup_n \|f_{n\wedge\tau}(\omega)\| d\mu = \int_{(\tau<+\infty)} \sup_n \|f_{n\wedge\tau}(\omega)\| d\mu$$

$$+ \int_{(\tau=+\infty)} \sup_n \|f_{n\wedge\tau}(\omega)\| d\mu$$

$$\leqslant \lambda \mu(\tau = +\infty)$$

$$+ \sup_n \int_\Omega \|f_n(\omega)\| d\mu < +\infty.$$

故

$$\sup_n \|f_{n\wedge\tau}(\omega)\| \in L_1(\mu, X),$$

因此，$(f_{n\wedge\tau})_{n=1}^\infty$ 是一致可积的鞅，由假设，$(f_{n\wedge\tau})_{n=1}^\infty$ a.e 收敛。

于是，我们得到 $(f_n)_{n=1}^\infty$ a.e 收敛于 f。由 Fatou 引理，

$$\int_\Omega \|f(\omega)\| d\mu = \int_\Omega \lim_n \|f_n(\omega)\| d\mu$$

$$\leqslant \sup_n \int_\Omega \|f_n(\omega)\| d\mu < +\infty,$$

即 $f \in L_1(\mu, X)$。证毕。

(4)$\Longrightarrow$(1)　由(4)得到一致有界鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 a.e 收敛，从而由定理 2.3.6 知，X 具 RNP，证毕。

利用上面结果，我们也很容易得到 RNP 的另一个等价条件。

定理 2.3.9　若 $1<p<+\infty$，则 TFAE：

(1) X 具 RNP；

(2) X 值 $L_p(\mu, X)$ 有界的鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 $L_p(\mu, X)$ 收敛的。

证明　(1)$\Longrightarrow$(2)　设 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 X 值 $L_p(\mu, X)$ 有界鞅，显然它是 $L_1(\mu, X)$ 有界的，为了证明它是一致可积的，根据定理 2.3.7 只须证明它是等度绝对连续的即可，由 Hödel 不等式，

$$\int_E \|f_n\| d\mu = \int_\Omega \|f_n\| \chi_E d\mu \leqslant \|\chi_E\|_q \cdot \|f_n\|_p,$$

其中

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

故

$$\sup_n \int_E \|f_n\| d\mu \leqslant (\sup_n \|f_n\|_p) \cdot (\mu(E))^{\frac{1}{q}} \longrightarrow 0,$$

当 $\mu(E) \longrightarrow 0$。因此 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等度连续，从而是一致可积的，由于 X 具 RNP，故 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a.e 收敛且 $L_1(\mu, X)$ 收敛于 $f \in L_1(\mu, X)$，由定理 2.2.4，$E(f|\Sigma_n) = f_n, \forall n$。为了证明 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $L_p(\mu X)$ 收敛于 f，只须证明 $f \in L_p(\mu, X)$ 即可。

因为

$$f_n(\omega) \xrightarrow{a.e} f(\omega),$$

故

$$\|f_n(\omega)\|^p \xrightarrow{a.e} \|f(\omega)\|^p,$$

由 Fatou 引理，

$$\int_\Omega \|f\|^p d\mu \leqslant \underline{\lim}_n \int_\Omega \|f_n\|^p d\mu \leqslant \sup_n \int_\Omega \|f_n\|^p d\mu < +\infty.$$

故 $f \in L_p(\mu, X)$，因此，$f_n \xrightarrow{L_p(\mu, X)} f$。证毕。

(2) $\Longrightarrow$ (1) 由于一致有界鞅是 L_p 有界的，因此由假设，每个一致有界鞅是 $L_p(\mu, X)$ 收敛，更是 $L_1(\mu, X)$ 收敛，由定理 2.3.6 知，X 具 RNP。证毕。

下面我们讨论可表示算子因子分解通过 RNP 空间问题，先作一些准备工作，首先我们注意到 l_1 是 RNP 空间。这由下面更一般的结论可得到。其证法也是很典型的。

定义 2.3.7 Banach 空间 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为有界完备的，如果对任何数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，若

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| < +\infty,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛。

显然，l_p 的自然基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界完备的 $(1 \leqslant p < +\infty)$。

定理 2.3.8 若 Banach 空间 X 具有界完备基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，则 X 具 RNP。

证明　首先，我们可再赋范使$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 X 的有界完备单调基（参见附录 2)，由定理 2.1.6 易知，RNP 空间在等价范数下仍为 RNP 空间。故不妨设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 X 的有界完备单调基，且设相应的坐标泛函为$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$。

任取有限完备测度空间(Ω,Σ,μ)及有界变差 μ 连续向量测度 $G:\Sigma\longrightarrow X$。

对任何 n，$x_n^*G:\Sigma\longrightarrow R^1$ 也是有界变差 μ 连续的数值测度。由数值 Radon-Nikydom 定理知，存在 $g_n\in L_1(\mu)$，使

$$x_n^*G(E)=\int_E g_n d\mu,\quad \forall E\in\Sigma.$$

下面利用有界完备性证明$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\omega)x_n$　a.e 收敛。

对任 $E\in\Sigma$，

$$\left\|\int_E\left(\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k\right)d\mu\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k^*(G(E))x_k\right\|\leqslant\|G(E)\|,$$

故由定理 2.1.5 知，

$$\int_\Omega\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k\right\|d\mu\leqslant|G|(\Omega),$$

由 Fatou 引理，

$$\int_\Omega\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k\right\|d\mu\leqslant\varliminf_n\int_\Omega\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k\right\|d\mu\leqslant|G|(\Omega),$$

故

$$\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k\right\|\in L_1(\mu),$$

因此，

$$\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k\right\|<+\infty,\quad \text{a.e.}$$

由于基是有界完备的，故

$$\lim_n\sum_{k=1}^{n}g_k(\omega)x_k=g(\omega),\ \text{a.e.}$$

因此，$g(\omega)$是 μ 可测的，且由于基是单调的，故

$$\|g(\omega)\| = \sup_n \left\|\sum_{k=1}^n g_k(\omega)x_k\right\|, \text{ a.e.},$$

因此，$g(\omega) \in L_1(\mu, X)$，且

$$\left\|\sum_{k=1}^n g_k(\omega)x_k\right\| \leqslant \|g(\omega)\| \quad \text{a.e.} \quad \forall n.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理知，对任 $E \in \Sigma$，

$$G(E) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n x_k^*(G(E))x_k = \lim_{n\to\infty}\int_E \left(\sum_{k=1}^n g_k(\omega)x_k\right)d\mu$$

$$= \int_E g(\omega)d\mu,$$

即 $g = \dfrac{dG}{d\mu}$，从而 X 具 RNP。证毕。

注　值得注意的是具有界完备基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的 Banach 空间 X 实际上线性同胚于某个可分共轭空间(考虑映象 $J: X \longrightarrow [x_n^*]^*$，

$$Jx\left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n^*\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n^*(x), \ \forall x \in X,$$

$$\sum_{n=1}^\infty a_n x_n^* \in [x_n^*]_{n=1}^\infty,$$

容易证明 J 是一个线性同胚)。因此，X 具 RNP 也可由下面定理 2.3.12：X^* 可分则 X^* 具 RNP 得到。□

推论 2.3.9　l_1 具 RNP。

注　由定理 2.3.6 的注可证 $l_1(\Gamma)$ 具 RNP，对任何集 Γ。□

定理 2.3.10　若 $T \in L(L_1(\mu), X)$，则 TFAE：

(1) $T \in R(L_1(\mu), X)$；

(2) T 因子分解通过 l_1 空间；

(3) T 因子分解通过 RNP 空间。

从而 X 具 RNP，当且仅当每个 $T \in L(L_1(\mu), X)$ 因子分解通过 l_1。

证明　(1)$\Longrightarrow$(2)　若 $T \in R(L_1(\mu), X)$，则 $\exists g \in L_\infty(\mu, X)$ 使

$$Tf = \int_\Omega fg\,d\mu, \ \forall f \in L_1(\mu),$$

且 $\|T\| = \|g\|_\infty$。

对每个 $\varepsilon>0$，由推论 2.1.2 知，存在可数值 μ 可测函数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$，使 $\|g-f_n\|_\infty<\varepsilon 2^{-n-1}$，$\forall n$。

令 $g_1=f_1$，$g_n=f_n-f_{n-1}$，$n\geqslant 2$，则

$$\left\|g-\sum_{m=1}^n g_m\right\|_\infty<\varepsilon 2^{-n-1},\ \forall n.$$

对每个 n，记

$$g_n=\sum_{k=1}^\infty x_{n,k}\chi_{E_{n,k}},$$

其中 $(E_{n,k})_{k=1}^\infty$ 是两两不相交的集列，则对一切 k，

$$\|x_{n,k}\|\leqslant\|g-f_n\|_\infty+\|g-f_{n-1}\|_\infty<\varepsilon 2^{-n-1}+\varepsilon 2^{-n-2}\leqslant\varepsilon 2^{-n},$$

且对任 $f\in L_1(\mu)$，有

$$\begin{aligned}Tf=\int_\Omega fg\,d\mu&=\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\left(\int_{E_{n,k}}f\,d\mu\right)x_{n,k}\\&=\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\left(\|x_{n,k}\|\int_{E_{n,k}}f\,d\mu\right)\frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|}.\end{aligned}$$

令 S：$L_1(\mu)\longrightarrow l_1(N\times N)$，

$$S(f)(n,k)=\|x_{n,k}\|\int_{E_{n,k}}f\,d\mu,\quad\forall f\in L_1(\mu),$$

则对一切 $f\in L_1(\mu)$，

$$\begin{aligned}\|Sf\|&\leqslant\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\|x_{n,k}\|\left|\int_{E_{n,k}}f\,d\mu\right|\leqslant\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\|x_{n,k}\|\int_{E_{n,k}}|f|\,d\mu\\&=\sum_{k=1}^\infty\|x_{1,k}\|\int_{E_{1,k}}|f|\,d\mu+\sum_{n=2}^\infty\sum_{k=1}^\infty\|x_{n,k}\|\int_{E_{n,k}}|f|\,d\mu\\&\leqslant\sum_{k=1}^\infty(\|g_1-g\|_\infty+\|g\|_\infty)\int_{E_{1,k}}|f|\,d\mu+\sum_{n=2}^\infty\varepsilon 2^{-n}\int_\Omega|f|\,d\mu\\&\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{4}+\|T\|\right)\|f\|_1+\frac{\varepsilon}{2}\|f\|_1\leqslant(\|T\|+\varepsilon)\|f\|_1,\end{aligned}$$

即 $\|S\|\leqslant\|T\|+\varepsilon$。

令 L：$l_1(N\times N)\longrightarrow X$，

$$L((a_{n,k}))=\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty a_{n,k}\frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|}$$

则

$$\|L((\alpha_{n,k}))\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{n,k}|=\|(\alpha_{n,k})\|_1,$$

即 $\|L\|\leqslant 1$，易见 $LS=T$。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3) 由推论 2.3.9 即知，证毕。

(3)$\Longrightarrow$(1) 若 $T=LS$，其中 $S\in L(L_1(\mu),Z)$，$L\in L(Z,Y)$，且 Z 具 RNP。则由定理 2.3.2 知 $S\in R(L_1(\mu),Z)$，即

$$\exists g\in L_\infty(\mu,Z),$$

使

$$Sf=\int_\Omega fg\,d\mu,\ \ \forall f\in L_1(\mu).$$

故由定理 2.1.6 知

$$Tf=LSf=L\int_\Omega fg\,d\mu=\int_\Omega f(Lg)\,d\mu,\ \ \forall f\in L_1(\mu),$$

且显然 $Lg\in L_\infty(\mu,X)$，故 $T\in R(L_1(\mu),X)$，证毕。

下面我们证明 w 紧算子是可表示算子。

定理 2.3.11 $WK(L_1(\mu),X)\subset R(L_1(\mu),X)$。

证明 这个定理的证明基于 w 紧算子因子分解通过自反空间(定理 2.3.16)，自反空间是 RNP 空间(定理 2.3.14)以及定理 2.3.10。证毕。

注 这个定理原来由 Dunford-Pettis-Phillips 证明，现在我们用稍许不同的方式(观察因子分解算子问题)很清楚得到。□

为了证明自反空间是 RNP 空间，我们先证明

定理 2.3.12 若 X 是 Banach 空间，使 X^* 是可分的，则 X^* 具 RNP。

我们先证明一个引理。

引理 2.3.13 设 $(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 值一致有界鞅，则

(1) 存在一个 $L_\infty(\mu,X^*)$ 有界 (即 $\|f\|_\infty\leqslant K$) w^* 可测函数 f：$\Omega\longrightarrow X^*$，使得对任何 $x\in X$，存在 $N_x\in\Sigma$，使 $\mu(N_x)=0$，且

$$\lim_{n}\langle x,f_n(\omega)\rangle=\langle x,f(\omega)\rangle,\ \forall\omega\notin N_x.$$

(2) $\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\longrightarrow 0$, a·e $\Longleftrightarrow$ 存在具本性可分值 f 满足(1) 此时，

$$\lim_n f_n(\omega)=f(\omega),\ \text{a·e.}$$

证明 (1) 由 Banach-Alaoglu 定理（共轭空间单位球 $U(X^*)$ 关于 w^* 拓扑是紧的），对每个 $\omega\in\Omega$，令 $f(\omega)$ 是 $(f_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ 的一个 w^* 极限点。

对每个 $x\in X$，$(\langle x,f_n(\omega)\rangle,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ 是实值一致有界鞅（由于 R^1 是 RNP 空间，即 Radon-Nikydom 定理成立）故由定理 2.3.6，$(\langle x,f_n(\omega)\rangle)_{n=1}^{\infty}$ a·e 收敛于 $g(\omega)$。

由于 $\{\langle x,f_n(\omega)\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ 以 $\langle x,f(\omega)\rangle$ 为极限点，所以 $g(\omega)=\langle x,f(\omega)\rangle$，a·e，因 $g(\omega)$ 是可测的，故 $\langle x,f(\omega)\rangle$ 也是可测的。由 x^* 的任意性知，$f(\omega)$ 是 w^* 可测的，且存在 $N_x\in\Sigma$，$\mu(N_x)=0$，使当 $\omega\notin N_x$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x,f_n(\omega)\rangle=g(\omega)=\langle x,f(\omega)\rangle,$$

且

$$\|f(\omega)\|\leqslant\sup_n\|f_n\|_\infty<+\infty.$$

证毕。

(2)"$\Longrightarrow$" 若 $\|f_n(\omega)-f(\omega)\|\longrightarrow 0$，a·e，由于 f_n 具本性可分值，对每个 n，故 f 也具本性可分值，且显然 f 满足(1)的结论。

"$\Longleftarrow$" 若 f 是满足(1)具本性可分值的 w^* 可测函数，由 X 显然是 X^* 的 norming 集，根据推论 2.1.3 知，f 是 μ 可测的，且 f 是 $\Sigma_\infty=\sigma(\bigcup_n\Sigma_n)$ 可测的。

令 Z 是 X^* 的可分子空间，$f(\Omega)\overset{\text{a.e}}{\subset}Z$，令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Z 的 norming 集。

由于

$$\lim_n\langle x,f_n(\omega)\rangle=\langle x,f(\omega)\rangle,\ \forall\omega\notin N_x,$$

故当

$$\omega \in \Omega \setminus \bigcup_k N_{x_k}$$

时，

$$\|f(\omega)\| = \sup_k |\langle x_k, f(\omega)\rangle| \leqslant \sup_k \lim_n |\langle x_k, f_n(\omega)\rangle|$$
$$\leqslant \sup_n \|f_n(\omega)\| \leqslant \sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty.$$

因

$$\mu(\bigcup_k N_{x_k}) = 0,$$

故 $f \in L_\infty(\mu, X)$，特别地，$f \in L_1(\mu, X)$

要证 $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \longrightarrow 0$, a·e, 由定理 2.2.10, 只须证 $f_n \xrightarrow{L_1(\mu,X)} f$，再由定理 2.2.4，只须证 $E(f|\Sigma_n) = f_n, \forall n$.

任取 $E \in \Sigma_n, x \in X$，

$$\langle x, \int_E f_n d\mu\rangle = \int_E \langle x, f_n\rangle d\mu = \lim_m \int_E \langle x, f_m\rangle d\mu$$
$$= \int_E \langle x, f\rangle d\mu = \left\langle x, \int_E f d\mu \right\rangle,$$

由 x 的任意性知，

$$\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

即 $E(f|\Sigma_n) = f_n, \forall n$. 证毕。

定理 2.3.12 的证明　任取 X^* 值一致有界鞅 $(f_n, \Sigma_n)_{n=1}^\infty$，由引理 2.3.13，考虑到 X^* 可分，即知 $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \longrightarrow 0$, a, e. 由定理 2.3.6 知，$X^*$ 具 RNP，证毕。

定理 2.3.14　自反空间是 RNP 空间。

证明　由空间 2.3.6 注知，只须证自反空间 X 的可分子空间 Z 具 RNP 即可。由 Z 可分知 Z^{**} 可分(因 Z 也是自反的)，故由定理 2.3.12 知，Z^{**} 具 RNP，由 $Z \cong Z^{**}$ 知 Z 具 RNP. 证毕。

下面是著名的 ω 紧算子因子分解定理。

定理　2.3.15　(Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski) 设 X 是 Banach 空间，$U(X) = \{x \in X, \|x\| \leqslant 1\}$ 是 X 的单位球。令 A

是 X 的一个有界均衡凸集。对每个正整数 n，令

$$U_n = 2^n A + 2^{-n} U(X),$$

$\|\cdot\|_n$ 表示 U_n 的 Mikowski 泛函，即 $\|x\|_n = \inf\{\alpha > 0; x \in \alpha U_n\}$。对每个 $x \in X$，令

$$|||x||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令

$$Y = \{x \in X, |||x||| < +\infty\},$$

令

$$C = \{x \in Y, |||x||| \leqslant 1\},$$

即 Y 关于 $|||\cdot|||$ 的单位球。设 $T: Y \longrightarrow X$ 是自然嵌入映象，即

$$Ty = y, \quad \forall y \in Y,$$

则

(1) $A \subset C$；

(2) $(Y, |||\cdot|||)$ 是 Banach 空间，$T \in L(Y, X)$；

(3) $T^{**}: Y^{**} \longrightarrow X^{**}$ 是 $1-1$ 的，且 $Y = (T^{**})^{-1}(X)$；

(4) $(Y, |||\cdot|||)$ 是自反的 $\Longleftrightarrow$ A 是相对 w 紧的。

证明 (1) 若 $x \in A$，则 $\|x\|_n \leqslant 2^{-n}$，故

$$|||x||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1,$$

故 $x \in C$，即 $A \subset C$。证毕。

(2) 令 $X_n = (X, \|\cdot\|_n)$，因 A 是有界的，故 $\|\cdot\|_n$ 是与 $\|\cdot\|$ 等价的 X 的范数，因此，X_n 是 Banach 空间。

令

$$Z = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_2 = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_n \in X,\right.$$

$$\left.\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}$$

则易见 Z 是 Banach 空间。

令 $\psi: Y \longrightarrow Z$，$\psi(y)=(Ty, Ty, \cdots)$，$y\in Y$，其中$T$：$Y \longrightarrow X$是自然嵌入，即 $Ty=y$，$\forall y\in Y$。

容易看到 ψ 是 Y 到 Z 内的一个线性等距，且

$$\psi(Y)=\{z=(z_n)\in Z; z_n=z_1, \forall n\},$$

即 Y 线性等距于 Z 中由对角线元素组成的 Z 的闭线性子空间，故 Y 是 Banach 空间。且对一切 $y\in Y$，

$$\|Ty\|=\|y\|\leqslant K\|y\|_1\leqslant K|||y|||,$$

对某个常数 K（因 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价），故 $T\in L(Y, X)$，证毕。

(3) 易见 $Z^*=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\oplus X_n^*\right)_2$，$Z^{**}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\oplus X_n^{**}\right)_2$，

令 $\psi: Y\longrightarrow Z$，$\psi(y)=(Ty, Ty, \cdots)$，$\forall y\in Y$（同(2)的定义）。容易证明，

$$\psi^{**}(y^{**})=(T^{**}y^{**}, T^{**}y^{**}, \cdots), \forall y^{**}\in Y^{**}.$$

由于 ψ 是线性等距，故 ψ^{**} 也是线性等距，因此，T^{**} 是1-1的（若 $T^{**}y^{**}=0$，则 $\psi^{**}y^{**}=0$，从而 $y^{**}=0$）。

由于 $T^{**}Y=TY\subset X$，故 $Y\subset(T^{**})^{-1}(X)$。反之若

$$y^{**}\in(T^{**})^{-1}(X),$$

则 $T^{**}y^{**}\in X$，另一方面 $\psi^{**}(y^{**})=(T^{**}y^{**}, \cdots)\in Z^{**}$，因此，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|T^{**}y^{**}\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty,$$

故 $T^{**}y^{**}=Ty_0$，对某个 $y_0\in Y$，从而由 T^{**} 是1-1的知，$y^{**}=y_0\in Y$，即 $(T^{**})^{-1}(X)\subset Y$，这就证明了 $Y=(T^{**})^{-1}(X)$。证毕。

(4) 设 J_X：$X\longrightarrow X^{**}$ 为典型嵌入映象。首先，我们有

$$\overline{J_XTC}^{\sigma(X^{**}, X^*)}=T^{**}U(Y^{**}),$$

其中等式左边表示 J_XTC 在 X^{**} 中 w^* 闭包，等式右边表示 Y^{**} 的单位球在 T^{**} 下的象。事实上，由 Banach-Alaoglu 定理，$(U(Y^{**}), \sigma(Y^{**}, Y^*))$ 是紧的，且由 Goldstine 稠密性定理知，

$$\overline{J_YC}^{\sigma(Y^{**}, Y^*)}=U(Y^{**}),$$

其中 J_Y：$Y\longrightarrow Y^{**}$ 是典型嵌入映象。但 T^{**} 是 $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ 到

$\sigma(X^{**},X^*)$连续的，故

$$\overline{J_X TC}^{\sigma(Y^{**},X^*)}=T^{**}U(Y^{**}),$$

我们简记作

$$\overline{TC}^{*}=T^{**}U(Y^{**}).$$

"$\Longleftarrow$" 若 A 是 X 中相对 w 紧集，则$\overline{A}^{\sigma(X,X^*)}$在 $(X,\sigma(X,X^*))$中紧(其中 $\sigma(X,X^*)$是 X 中关于 X^* 的 w 拓扑)．令

$$K_n=2^n\overline{A}^{\sigma(X,X^*)}+2^{-n}U(X^{**}),$$

则 K_n 为$(X^{**},\sigma(X^{**},X^*))$中紧集，因$TC\subset TA\subset K_n$，故

$$\overline{TC}^{\sigma(X^{**},X^*)}\subset K_n,\ \forall n,$$

因此，

$$T^{**}(U(Y^{**}))\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}(X+2^{-n}U(X^{**}))=X.$$

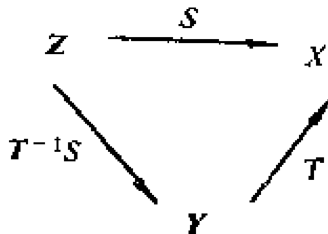
故

$$Y^{**}\subset(T^{**})^{-1}(X)=J_Y(Y),$$

从而，$J_Y(Y)=Y^{**}$，故 Y 是自反的。

"$\Longrightarrow$" 若 Y 是自反的，则 C 是 $\sigma(Y,Y^*)$ 是紧的，从而 C（实际上是 TC）是 $\sigma(X,X^*)$ 紧．由 (1)，$A\subset C$，故 A 是相对 $\sigma(X,X^*)$紧的，即 A 是相对 w 紧的。证毕。

定理 2.3.15 若 X、Z是Banach 空间，$S\in WK(Z,X)$，则S因子分解通过自反空间。



证明 若 $S\in WK(Z,X)$，则 $SU(Z)$ 是相对 $\sigma(X,X^*)$紧的，令$A=SU(Z)$，由定理 2.3.14(4)，相应的空间 Y 是自反的，再根据定理2.3.14，$T^{**}=T$ 是1-1 的，(注：这里，Y,T 均沿用定理 2.3.14 记号)，从而 $S=T(T^{-1}S)$，(见图) 即 S 因子分解通过自反空间。证毕。

注 这个定理是 Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski 得到

的（见D-F-J-P-1），上述这篇论文提供了重要的方法，并且还有许多有趣结论，我们选择其中之一（推论2.3.16），读者可深入学习该论文。□

定义 2.3.8 Banach 空间 X 称为弱紧生成的（WCG），如果存在 X 的 w 紧集 K，使 $\overline{\text{span}K}=X$。

注　显然，可分空间是 WCG 空间，自反空间也是 WCG 空间。□

推论 2.3.16 若 K 是 Banach 空间 X 的 w 紧子集，则存在自反空间 R 和一个 1-1 线性算子 $T\in L(R,X)$，使 $K\subset T(R)$。从而 X 是WCG空间，当且仅当存在自反空间 R 及 1-1 的$T\in L(R,X)$，使 $\overline{T(R)}=X$。

证明　(1) 若 K 是 w 紧集，则定理 2.3.14 中相应于 K 的空间 Y 是自反的，且 T：$Y\longrightarrow X$ 是 1-1 的，$K\subset TC\subset T(Y)$。

(2) 若 X 是 WCG 空间，则存在 w 紧集 K，使$\overline{\text{span}}(K)=X$，在定理 2.3.14 中相应于 K 的空间 Y 是自反的，T：$Y\longrightarrow X$ 是 1-1 的，$K\subset T(Y)$，故

$$X=\overline{\text{span}}(K)\subset\overline{T(Y)}\subset X,$$

因此，$\overline{T(Y)}=X$。

(3) 若存在自反空间 R 及 1-1 的 $T\in L(R,X)$，使 $\overline{T(R)}=X$，则由于 $TU(R)$是 w 紧的，故

$$\overline{\text{span}}(TU(R))=\overline{T(R)}=X,$$

从而 X 是 WCG 空间。证毕。

注　关于 WCG 空间详细讨论请见参考书(D-1)，目前一个有关的 open 问题是若 X 是 WCG 空间，且 X^* 是 RNP 空间，是否 X 的每个子空间是 WCG 空间？最近，schlüchtermann 和 Wheele（见 S-W-1）引入强 WCG 空间这一概念；Banach 空间 X 称为强 WCG 空间，如果存在 X 中 w 紧集 K，使得对任 $\varepsilon>0$，任何 w 紧集 L，存在正整数 n，使$L\subset nK+\varepsilon U(X)$，并且(S-W-1)中证明自反空间及可分 Schur 空间是强 WCG 空间，强 WCG

空间是 w 序列完备且 WCG 的。文中还提出若干Open问题。□

由定理 2.3.11 立刻知道 $K(L_1(\mu),X)\subset R(L_1(\mu),X)$，但我们再给出一个直接证明。

定理 2.3.17 $T\in K(L_1(\mu),X)\Longleftrightarrow$相应的鞅$(\xi_\pi,\sigma(\pi))_\pi$是$L_\infty(\mu,X)$收敛的。

此时，存在 $g\in L_\infty(\mu,X)$，使 g 具相对紧值域且

$$Tf=\int_\Omega fg\,d\mu,\ \forall f\in L_1(\mu).$$

证明 对任何分割 $\pi=(E_1,\cdots,E_n)$，如引理 2.3.4，令

$$E_\pi(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_{E_i}fd\mu}{\mu(E_i)}\chi_{E_i},\ \forall f\in L_1(\mu),$$

则

$$TE_\pi(f)=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{T(\chi_{E_i})}{\mu(E_i)}\chi_{E_i}\Big)fd\mu=\int_\Omega\xi_\pi fd\mu.$$

因此，立刻得到(或从引理2.3.1 证明看出)，对任何两个分割 π_1，π_2，有

$$\|TE_{\pi_1}-TE_{\pi_2}\|=\|\xi_{\pi_1}-\xi_{\pi_2}\|_\infty. \tag{2.6}$$

且由引理 2.3.4 知

$$\|TE_\pi f-Tf\|\leqslant\|T\|\cdot\|E_\pi f-f\|_1\longrightarrow 0. \tag{2.7}$$

"$\Longrightarrow$" 若 $T\in K(L_1(\mu),X)$，由引理 2.3.4，

$$\lim_\pi\|E_\pi f-f\|_\infty=0,\ \forall f\in L_\infty(\mu),$$

因为 $T^*:X^*\longrightarrow L_\infty(\mu)$也是紧算子，故 $T^*U(X^*)$是相对紧的。从而

$$\lim_\pi\|E_\pi T^*-T^*\|=\lim_\pi\sup_{\|x^*\|\leqslant1}\|E_\pi T^*x^*-T^*x^*\|=0.$$

但 $E_\pi T^*=(TE_\pi)^*$，事实上，任取 $x^*\in X^*$，$f\in L_1(\mu)$，

$$(TE_\pi)^*(x^*)(f)=x^*(TE_\pi f)=(T^*x^*)(E_\pi f)$$

$$=(T^*x^*)\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_{E_i}fd\mu}{\mu(E_i)}\chi_{E_i}$$

$$= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\int_{E_i} (T^* x^*) d\mu}{\mu(E_i)} \cdot \chi_{E_i} \right) f d\mu$$

$$= E_\pi (T^* x^*)(f),$$

故

$$(TE_\pi)^*(x^*) = E_\pi T^* x^*, \forall x^* \in X^*,$$

故

$$(TE_\pi)^* = E_\pi T^*.$$

因此，

$$\lim_\pi \| TE_\pi - T \| = \lim_\pi \| E_\pi T^* - T^* \| = 0.$$

从(2.6)式知，$(\xi_\pi)_\pi$ 为 $L_\infty(\mu, X)$ 中 Cauchy 列，因此 $(\xi_\pi)_\pi$ 收敛于 $g \in L_\infty(\mu, X)$，由于 $(\xi_\pi)_\pi$ 为简单函数，因此，g 具相对紧值域，且

$$Tf = \lim_\pi \int_{\Omega} \xi_\pi f d\mu = \int_{\Omega} g f d\mu, \quad \forall f \in L_1(\mu).$$

证毕。

"$\Longleftarrow$" 若 $\| \xi_\pi - g \|_\infty \longrightarrow 0$，对某个 $g \in L_\infty(\mu, X)$，则由(2.6)式知，$(TE_\pi)_\pi$ 为 Cauchy net，从而 $TE_\pi \longrightarrow S \in L(L_1(\mu), X)$，由(2.7)式知，对一切 $f \in L_1(\mu)$

$$TE_\pi f \longrightarrow Tf, \quad TE_\pi f \longrightarrow Sf.$$

故 $S = T$，即 $TE_\pi \longrightarrow T$，但 TE_π 为有限秩算子，故 T 为紧算子。证毕。

下面我们证明紧算子因子分解通过 c_0 的子空间。

引理 2.3.18 设 K 是 Banach 空间 X 的紧子集，则存在

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X, \quad \lim_n \| x_n \| = 0,$$

使 $K \subset \overline{co}(x_n)$。

证明 由于 K 是紧集，选 $\{x_{i,1}\}_{i=1}^{n_1} \subset X$，使

$$2K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{B}\left(x_{i,1}, \frac{1}{4}\right),$$

其中 $\bar{B}(x, \delta)$ 表示以 x 为中心的半径为 δ 的闭球。

令

$$K_2 = \bigcup_{i=1}^{n_1}\left(\bar{B}\left(x_{i,1}, \frac{1}{4}\right) \cap 2K - x_{i,1}\right).$$

则 K_2 是 $\bar{B}\left(0, \frac{1}{2}\right)$的紧子集，故存在$\{x_{i,2}\}_{i=1}^{n_2} \subset \bar{B}\left(0, \frac{1}{2}\right)$，使

$$2K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} \bar{B}\left(x_{i,2}, \frac{1}{4^2}\right),$$

令

$$K_3 = \bigcup_{i=1}^{n_2}\left(\bar{B}\left(x_{i,2}, \frac{1}{4^2}\right) \cap 2K_2 - x_{i,2}\right),$$

归纳地得到$\{x_{i,j}\}_{i=1}^{n_j}$，$j = 1, 2, \cdots$。

对每个 $x \in K$，存在 i_1，$1 \leqslant i_1 \leqslant n_1$，使 $2x - x_{i_1,1} \in K_2$，于是存在i_2，$1 \leqslant i_2 \leqslant n_2$，使 $4x - 2x_{i_1,1} - x_{i_2,2} \in K_3$，一般地，

$$x - \left(\frac{1}{2}x_{i_1,1} + \frac{1}{2^2}x_{i_2,2} + \cdots + \frac{1}{2^k}x_{i_k,k}\right) \in 2^{-k}K_{k+1}$$

故

$$x \in \overline{co}(x_{i,j}; 1 \leqslant i \leqslant n_j, j = 1, 2, \cdots),$$

且由

$$\|x_{i,j}\| \leqslant 2.4^{-j+1},$$

对 $j > 1$，知$(x_{i,j})$为所求之序列。证毕。

定理 2.3.19 对任 $T \in K(X, Y)$，T 因子分解通过 c_0 的子空间。

证明 因 $T: X \longrightarrow Y$ 是紧算子，故 $T^*: Y^* \longrightarrow X^*$ 也是紧算子，由引理 2.3.18，存在$(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$，使

$$T^*U(Y^*) \subset \overline{co}(x_n^*), \lim_n \|x_n^*\| = 0.$$

对任 $x \in X$，$(x_n^*(x)) \in c_0$，且

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \sup\{|y^*(Tx)|, y^* \in U(Y^*)\} \\ &= \sup\{|T^*x^*(x)|; y^* \in U(Y^*)\} \\ &\leqslant \sup_n |x_n^*(x)|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

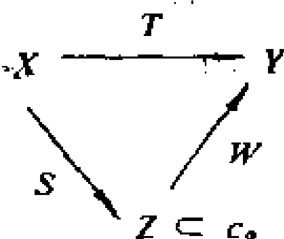
令 $Z = \overline{\text{span}}((x_n^*(x)); x \in X) \subset c_0$。

定义 $W: \{(x_n^*(x)); x\in X\}\longrightarrow Y, W((x_n^*(x))=Tx, W$ 是有意义的，事实上，若 $(x_n^*(x))=(x_n^*(y)), x,y\in X$，则由 (2.8) 式知，

$$\|T(x-y)\|\leqslant\sup_n|x_n^*(x-y)|=0,$$

故 $Tx=Ty$。因此 W 有确定意义，且

$$\|Tx\|=\|W((x_n^*(x))\|\leqslant\sup_n|x_n^*(x)|\leqslant\|(x_n^*(x))\|,$$



知 $\|W\|\leqslant 1$，故可将 W 延拓为 $Z\longrightarrow Y$ 的有界线性算子，且令 $S: X\longrightarrow c_0, Sx=(x_n^*(x))$，有 $Tx=W(x_n^*(x))=WS(x)$，故 $T=WS$，即 T 因子分解通过 c_0 的子空间(见图)证毕。

下面，我们讨论 DP 算子。

引理 2.3.20 设 $f\in L_1(\mu,X)$，则

$$\|f\|_{Pe}\equiv\sup\left\{\int_\Omega|x^*f(\omega)|d\mu; x^*\in U(X^*)\right\}$$

$$=\sup\left\{\left\|\int_\Omega f\varphi d\mu\right\|; \ \varphi\in L_\infty(\mu), \|\varphi\|_\infty=1\right\}$$

证明 任取 $\varphi\in L_\infty(\mu), \|\varphi\|_\infty=1$，再取 $x^*\in S(X^*)$ 使

$$\left\|\int_\Omega f\varphi d\mu\right\|=x^*\int_\Omega f\varphi d\mu,$$

则

$$\left\|\int_\Omega f\varphi d\mu\right\|=x^*\int_\Omega f\varphi d\mu=\int_\Omega x^*(f)\varphi d\mu$$

$$\leqslant\int_\Omega|x^*(f)|\cdot|\varphi|d\mu\leqslant\int_\Omega|x^*(f)|d\mu\leqslant\|f\|_{Pe}.$$

反之，对任 $\varepsilon>0$，取 $x^*\in S(X^*)$，使

$$\|f\|_{Pe}-\varepsilon<\int_\Omega|x^*(f)|d\mu.$$

令 $\varphi_0=\mathrm{sgn}(x^*(f))$（符号函数）。则 φ_0 是 Σ 可测的，且

$$\|\varphi_0\|_\infty=1,$$

且

$$\|f\|_{Pe}-\varepsilon\leqslant\int_\Omega|x^*(f)|d\mu=\int_\Omega x^*(f)\varphi_0 d\mu$$

$$=x^*\int_\Omega f\varphi_0 d\mu\leqslant\left\|\int_\Omega f\varphi_0 d\mu\right\|$$

$$\leqslant\sup\left\{\left\|\int_\Omega f\varphi d\mu\right\|;\varphi\subset L_\infty(\mu),\|\varphi\|_\infty=1\right\}$$

由 ε 任意性即得所要等式。证毕。

注 1　若 Σ_1 是 Σ 的子 σ 代数，且 f 是 Σ_1 可测的，则对任 $\varepsilon>0$，可选 $\varphi\in L_\infty(\mu)$，$\|\varphi\|_\infty=1$，且 φ 是 Σ_1 可测，使

$$\|f\|_{Pe}-\varepsilon\leqslant\left\|\int_\Omega f\varphi d\mu\right\|.$$ □

注 2

$$\|f\|_{Pe}=\frac{1}{K}\sup\left\{\left\|\int_\Omega f\varphi d\mu\right\|;\ \varphi\in L_\infty(\mu),\|\varphi\|_\infty\leqslant K\right\},$$

对一切 $f\in L_1(\mu,X)$。□

定理 2.3.21　若 $T\in L(L_1(\mu),X)$，$(\xi_\pi,\sigma(\pi))_\pi$ 是相应于 T 的一致有界的鞅，则

$(\xi_\pi)_\pi$ 是 $\|\cdot\|_{Pe}$ Cauchy 当且仅当对任何增加 $(\pi_n)_{n=1}^\infty$，任何

$$(\varphi_n)_{n=1}^\infty\subset L_1(\mu),\varphi_n\xrightarrow{w}0,\ \sup_n\|\varphi_n\|_\infty\leqslant K<+\infty,$$

有

$$\lim_n\left\|\int_\Omega\xi_{\pi_n}\varphi_n d\mu\right\|=0.$$

证明　"$\Longleftarrow$"　设 $(\xi_\pi)_\pi$ 不是 $\|\cdot\|_{Pe}$ Cauchy，则同定理 2.3.6 (2)$\Longrightarrow$(1) 证法，存在 $\delta>0$ 及增加的分割序列 $(\pi_n)_{n=1}^\infty$ 使

$$\|\xi_{\pi_n}-\xi_{\pi_{n-1}}\|_{Pe}>\delta,\ \forall n.$$

由于 $(\xi_{\pi_n}-\xi_{\pi_{n-1}})$ 是 $\sigma(\pi_n)$ 可测的，故由引理 2.3.20 注 1 知，存在 $f_n\in L_\infty(\mu)$，$\|f_n\|_\infty=1$ 且 f_n 是 $\sigma(\pi_n)$ 可测的，使

$$\left\|\int_\Omega f_n(\xi_{\pi_n}-\xi_{\pi_{n-1}})d\mu\right\|>\delta.$$

由于 $(\xi_{\pi_n},\sigma(\pi_n))_{n=1}^\infty$ 是鞅，故

$$\int_\Omega (\xi_{\pi_n} - \xi_{\pi_{n-1}}) f_n d\mu = \int_\Omega (\xi_{\pi_n} f_n - E(\xi_{\pi_n} | \sigma(\pi_{n-1})) f_n) d\mu$$

$$= \int_\Omega (\xi_{\pi_n} f_n - \xi_{\pi_n} E(f_n | \sigma(\pi_{n-1})) d\mu$$

(见定理 2.2.1(6))。

令

$$\varphi_n = f_n - E(f_n | \sigma(\pi_{n-1})),$$

则

$$\left| \int_\Omega \xi_{\pi_n} \varphi_n d\mu \right| = \left| \int_\Omega f_n (\xi_{\pi_n} - \xi_{\pi_{n-1}}) d\mu \right| > \delta,$$

且 $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant 2$。

若 $g \in L_\infty(\mu)$，且 g 是

$$\sigma(\bigcup_n \sigma(\pi_n)) \equiv \Sigma_\infty$$

可测的，则易见

$$\lim_n \int_\Omega \varphi_n g d\mu = 0.$$

故对任何 $g \in L_\infty(\mu)$，由于 $E(g | \Sigma_\infty)$ 是 Σ_∞ 可测的，有

$$\lim_n \int_\Omega \varphi_n g d\mu = \lim_n \int_\Omega E(\varphi_n g | \Sigma_\infty) d\mu$$

$$= \lim_n \int_\Omega \varphi_n E(g | \Sigma_\infty) d\mu = 0.$$

因此，$\varphi_n \xrightarrow{w} 0$。证毕。

"$\Longrightarrow$" 设 $(\xi_\pi)_\pi$ 是 $\|\cdot\|_{P_e}$ Cauchy 的，故存在增加的分割序列 $(\pi_n)_{n=1}^\infty$，使得对任 $\pi', \pi'' \geqslant \pi_n$，有

$$\|\xi_{\pi'} - \xi_{\pi''}\|_{P_e} < \frac{1}{n}. \tag{2.9}$$

若存在某个增加的分割序列 $(\pi_n')_{n=1}^\infty$，及 $\delta > 0$，和

$$(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L_1(\mu), \varphi_n \xrightarrow{w} 0, \ \sup_n \|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1,$$

且

$$\overline{\lim_n} \left| \int_\Omega \xi_{\pi_n'} \varphi_n d\mu \right| > \delta > 0, \tag{2.10}$$

令 $\pi_n''=\pi_n V\pi_n'$，则

$$\int_\Omega \xi_{\pi_n''}\varphi_n d\mu=\int_\Omega E(\xi_{\pi_n''}\varphi_n|\sigma(\pi_n'))d\mu$$
$$=\int_\Omega \varphi_n E(\xi_{\pi_n''}|\sigma(\pi_{\pi_n'}))d\mu$$
$$=\int_\Omega \varphi_n\xi_{\pi_n'}d\mu.$$

从而，我们可假设增加的分割序列 (π_n) 同时满足 (2.9) 及 (2.10)。

由于 $\varphi_n\xrightarrow{w}0$（即关于$\sigma(L_1(\mu),L_\infty(\mu))$收敛于 0），$(\xi_{\pi_n})_{n=1}^\infty$是简单函数列，故对任何 $\varepsilon>0$，任何 n，存在 $k(n,\varepsilon)$，使得当 $k>k(n,\varepsilon)$时，有

$$\left|\int_\Omega \xi_{\pi_n}\varphi_k d\mu\right|<\varepsilon. \tag{2.11}$$

因此，应用(2.10)及(2.11)可归纳选取$(n_k)_{k=1}^\infty$，使

$$\left|\int_\Omega \xi_{\pi_{n_{k-1}}}\varphi_{n_k}d\mu\right|<\frac{\delta}{2},\quad \left|\int_\Omega \xi_{\pi_{n_k}}\varphi_{n_k}d\mu\right|>\delta,$$

从而，

$$\left|\int_\Omega (\xi_{\pi_{n_{k-1}}}-\xi_{\pi_{n_k}})\varphi_{n_k}d\mu\right|>\frac{\delta}{2},$$

由引理 2.3.20 知

$$\|\xi_{\pi_{n_k}}-\xi_{\pi_{n_{k-1}}}\|_{Pe}>\frac{\delta}{2},$$

这与(2.9)矛盾。证毕。

注　在证明中用到 ξ_π 是简单函数，但在考虑一般鞅序列情况，与定理证明同样（仅在证明(2.11)式时用简单函数来逼近 f_n）可得：

一致有界鞅$(f_n,\Sigma_n)_{n=1}^\infty$ 是 $\|\cdot\|_{Pe}$ Cauchy $\Longleftrightarrow$ 对任

$$(\varphi_n)_{n=1}^\infty\subset L_1(\mu),\ \|\varphi_n\|_\infty\leqslant K<+\infty,\ \varphi_n\xrightarrow{w}0,$$

有

$$\lim_n \left\| \int_\Omega f_n \varphi_n d\mu \right\| = 0. \quad \square$$

定理 2.3.22 若 $T \in L(L_1(\mu), X)$，则

T 是 DP 算子 $\Longleftrightarrow$ T 相应的一致有界鞅 $(\xi_\pi, \sigma(\pi))_\pi$ 是 $\|\cdot\|_{P_e}$ Cauchy 的.

证明 "$\Longleftarrow$" 若 $(\xi_\pi, \sigma(\pi))_\pi$ 不是 $\|\cdot\|_{P_e}$ Cauchy 的，则存在 $\delta>0$，增加的分割序列 $(\pi_n)_{n=1}^\infty$，及 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L_1(\mu)$，$\|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1$，$\varphi_n \xrightarrow{w} 0$，使

$$\left\| \int_\Omega \xi_{\pi_n} \varphi_n d\mu \right\| > \delta > 0.$$

(根据定理 2.3.21)。

由于

$$\int_\Omega \xi_{\pi_n} \varphi_n d\mu = TE(\varphi_n | \sigma(\pi_n)),$$

故

$$\|TE(\varphi_n | \sigma(\pi_n))\| > \delta > 0,$$

但是，

$$E(\varphi_n | \sigma(\pi_n)) \xrightarrow{w} 0,$$

事实上，令

$$\Sigma_\infty = \sigma(\bigcup_n \sigma(\pi_n)),$$

容易看到，当 $g \in L_\infty(\mu)$，且 g 是 Σ_∞ 可测时，有

$$\lim_n \int_\Omega E(\varphi_n | \sigma(\pi_n)) g d\mu = 0.$$

从而，对任 $g \in L_\infty(\mu)$，因 $E(g | \Sigma_\infty) \in L_\infty(\mu)$，且 $E(g | \Sigma_\infty)$ 是Σ_∞可测的，故

$$\begin{aligned}\lim_n \int_\Omega E(\varphi_n | \sigma(\pi_n)) g \, d\mu &= \lim_n \int_\Omega E(E(\varphi_n | \sigma(\pi_n)) g | \Sigma_\infty) d\mu \\ &= \lim_n \int_\Omega E(\varphi_n | \sigma(\pi_n)) (E(g | \Sigma_\infty) d\mu \\ &= 0.\end{aligned}$$

即

$$E(\varphi_n|\sigma(\pi_n))\xrightarrow{w}0,$$

从而 T 不是 DP 算子。证毕。

"$\Longrightarrow$" 假设T 不是 DP 算子，则存在

$$(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\subset L_1(\mu),\varphi_n\xrightarrow{w}0,$$

但 $\|T\varphi_n\|\geqslant\varepsilon>0$，由引理 2.3.4，$E(\cdot|\sigma(\pi))\equiv E_\pi(\cdot)$是 $L_1(\mu)$ 到 $L_1(\mu)$的有限秩压缩算子，故

$$E(\varphi_n|\sigma(\pi))\xrightarrow{w}0,(n\to\infty),$$

对固定 π。

由于$\{E(\varphi_n|\sigma(\pi)\}_{n=1}^{\infty}$在有限维空间中，故

$$\|E(\varphi_n|\sigma(\pi))\|_1\longrightarrow0.$$

因此，可选增加的分割序列 $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ 及 $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ 的子列（仍记作 $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$），使对一切 n，有

$$\|E(\varphi_n|\sigma(\pi_n))\|<\delta\equiv\frac{1}{4}\varepsilon\|T\|^{-1}.$$

由于 $\varphi_n\xrightarrow{w}0$，故$(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$是一致可积的，即

$$\lim_{k\to\infty}\sup_n\int_{(|\varphi_n|>k)}|\varphi_n|d\mu=0.$$

从而存在 $K>0$，使对一切 n，

$$\int_{(|\varphi_n|>K)}|\varphi_n|d\mu\leqslant\delta.$$

令 $$\psi_n=\begin{cases}\varphi_n & 当\ |\varphi_n|\leqslant K\ 时,\\ 0 & 当\ |\varphi_n|>K\ 时,\end{cases}$$

则 $\|\psi_n\|_\infty\leqslant K$，且 $\|\psi_n-\varphi_n\|_1<\delta$。

令 $\eta_n=\psi_n-E(\psi_n|\sigma(\pi_n))$，则 $\eta_n\in L_\infty(\mu)$，且 $\|\eta_n\|_\infty\leqslant2K$，同时，

$$\begin{aligned}\|\varphi_n-\eta_n\|_1&\leqslant\|\varphi_n-\psi_n\|_1+\|\psi_n-\eta_n\|_1\leqslant\|\varphi_n-\psi_n\|_1\\&\quad+\|E(\varphi_n|\sigma(\pi_n))\|_1+\|E(\varphi_n-\psi_n|\sigma(\pi_n))\|_1\\&\leqslant2\|\varphi_n-\psi_n\|_1+\delta\leqslant3\delta.\end{aligned}$$

$$\|T\eta_n\| \geqslant \|T\varphi_n\| - \|T\| \cdot \|\varphi_n - \eta_n\|_1 \geqslant \varepsilon - \|T\| 3\delta \geqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

当 $E \in \sigma(\pi_m)$, $n > m$ 时，$E \in \sigma(\pi_n)$，故

$$\int_\Omega \eta_n \chi_E d\mu = \int_E \eta_n d\mu = \int_\Omega (\psi_n - E(\psi_n | \sigma(\pi_n))) d\mu = 0.$$

从而对任 $g \in L_\infty(\mu)$，且 g 是

$$\Sigma_\infty \equiv \sigma(\bigcup_n \sigma(\pi_n))$$

可测的有

$$\lim_n \int_\Omega \eta_n g d\mu = 0,$$

因此对任何 $g \in L_\infty(\mu)$，由于 $E(g | \Sigma_\infty)$ 是 Σ_∞ 可测的，故

$$\lim_n \int_\Omega \eta_n g d\mu = \lim_n \int_\Omega E(\eta_n g | \Sigma_\infty) d\mu$$

$$= \lim_n \int_\Omega \eta_n E(g | \Sigma_\infty) d\mu = 0.$$

因此 $\eta_n \xrightarrow{w} 0$，即 $(\eta_n)_{n=1}^\infty$ 关于 $\sigma(L_1(\mu), L_\infty(\mu))$ 收敛于 0。

因此，我们得到，若 T 不是 DP 算子，则存在

$$(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L_1(\mu),\ \varphi_n \xrightarrow{w} 0,\ \|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1,$$

使 $\|T\varphi_n\| \geqslant \delta > 0$，对某个 $\delta > 0$。

选择增加序列 $(\pi_n')_{n=1}^\infty$，使 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ 是

$$\Sigma_\infty' \equiv \sigma(\bigcup_n \sigma(\pi_n'))$$

可测的。这是可以作到的，由于每个 φ_n 是简单函数列的极限。

对每个 n，选 h_n 是 $\bigcup_n \sigma(\pi_n)$ 可测的简单函数，（不妨设 h_n 是 $\sigma(\pi_{k_n}')$ 可测的），使

$$\|h_n - \varphi_n\|_1 \leqslant \frac{\delta}{2n\|T\|},$$

$$\|h_n\|_\infty \leqslant \|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1,$$

易见

$$h_n \xrightarrow{w} 0.$$

但

$$\|Th_n\| \geqslant \frac{\delta}{2} > 0,$$

但

$$Th_n = \lim_k \int_\Omega \xi_{\pi_k^l} h_n d\mu = \int_\Omega \xi_{\pi_{k_n}^l} h_n d\mu,$$

故

$$\left| \int_\Omega \xi_{\pi_{k_n}^l} h_n d\mu \right| \geqslant \frac{\delta}{2} > 0,$$

由定理 2.3.21 知，$(\xi_\pi)_\pi$ 不是 $\|\cdot\|_{Pe}$ Cauchy 的。证毕。

定理 2.3.23 $R(L_1(\mu), X) \subset DP(L_1(\mu), X)$。

证明　由于

$$\|f\|_{Pe} \leqslant \int_\Omega \|f\| d\mu = \|f\|_1,$$

应用定理 2.3.5 和定理 2.3.23 即得所要结论。证毕。

注　定理 2.3.3 证明了 X 具 RNP 当且仅当 $L(L_1(\mu), X) = R(L_1(\mu), X)$。Bourgain（见 B-1）证明 X 具 RNP 当且仅当 $DP(L_1, X) = R(L_1, X)$。□

在第六章中，我们将证明 $l_1 \subset\!\!\!\to X$ 当且仅当 $L(L_1, X^*) = DP(L_1, X^*)$。

定理 2.3.24 若(Ω, Σ, μ)是有限完备测度空间，则 $L_1(\mu)$ 是 DP 空间。

证明　对任何 Banach空间X，$WK(L_1(\mu), X) \subset R(L_1(\mu) X)$（定理 2.3.11），$R(L_1(\mu), X) \subset DP(L_1(\mu), X)$，（定理 2.3.23），故

$$WK(L_1(\mu), X) \subset DP(L_1(\mu), X),$$

即 $L_1(\mu)$是 DP 空间。证毕。

定理 2.3.25 若(Ω, Σ, μ)是有限完备测度空间。则 $L_1(\mu)$没有无限维自反可补子空间。

证明　设 Y 是 $L_1(\mu)$ 的自反可补子空间，则存在投影 P: $L_1(\mu) \longrightarrow Y$，由于 Y 是自反的，故 P 是 w 紧算子，由定理 1.2.9

及 $L_1(\mu)$ 是 DP 空间知 P^2 为紧算子，从而 $P^2U(Y)=U(Y)$ 为相对紧集，故 $\dim Y<+\infty$。证毕。

注　实际上，我们将证明 DP 空间没有无限维自反可补子空间(见定理 6.1.4)。□

定理 2.3.26　若(Ω,Σ,μ)是有限完备测度空间，Y 是$L_1(\mu)$的可补(无限维)RNP 子空间，则 $Y\approx l_1$。

证明。由于 Y 是 $L_1(\mu)$的可补子空间，则存在投影 P：$L_1(\mu)\longrightarrow Y$，由于 Y 具 RNP，根据定理 2.3.10，P 因子分解通过 l_1 空间，即存在 $R\in L(L_1(\mu),l_1)$，$T\in L(l_1,Y)$使$P=TR$。但 $TRy=y$，$\forall y\in Y$，故

$$\|y\|=\|TRy\|\leqslant\|T\|\cdot\|Ry\|,\forall y\in Y,$$

即

$$\|T\|^{-1}\|y\|\leqslant\|Ry\|\leqslant\|R\|\cdot\|y\|,$$

因此 $R|_Y$：$Y\longrightarrow l_1$ 是内线性同胚，$R(Y)\approx Y$。

又

$$RT:\ l_1\longrightarrow R(Y)\subset l_1,\quad RTRT=RPT=RT$$

故 $R(Y)$在 l_1 中可补，由于 l_1 是 prime 空间(定理 1.2.6)故

$$R(Y)\approx l_1,$$

从而

$$Y\approx R(Y)\approx l_1.$$

证毕。

第二章　参 考 文 献

(B-1)J. Bourgain Dunford-Pettis operators on L^1 and the Radon-Nikodym property. Israel J.Math. Vol. 37. no.1—2. (1980)34～47.

(B-2)J. Bourgain A Characterization of non-Dunford-Pettis operators on L^1. Israel J. Math vol. 37. no.

1—2.(1980)48～53.

〔D-F-J-P-1〕W.J.Davis, T.Figiel, W.B.Johnson and A. Pelczynski Factoring weakly Compact operators. J. Func. Ann.17.(1974).311～327.

〔S-W-1〕G.Schlüchtermann & R. F.Wheeler On strongly WCG Banach Spaces . Math. Z. 199(1988)387～398.

第三章 Lebesgue-Bochner 空间$L_p(\mu,X)$

1977 年 Diestel 和 Uhl 写了"Vector measures"一书(见参考书(D-U-1)),对向量测度、RNP及Banach 空间理论的许多方面作了很好的阐述。然而,在该书中,他们写道,虽然向量测度理论在近期得到迅速发展,但对 $L_p(\mu,X)$的研究还处于"幼年状态"。具体地说,也就是下述问题的结论甚少:

若 X 是具某种性质 P 的 Banach 空间,是否 $L_p(\mu,X)$也具这种性质 P?

我们称性质 P 关于 $L_p(\mu,X)$是稳定的,如果 X 具性质 P, 则 $L_p(\mu,X)$也具性质 P。近年来,人们得到了这方面的许多结论,本章就此作一点归纳。

第一节先罗列一些特殊 Banach 空间的定义, 然后指出哪些空间关于 $L_p(\mu,X)$是稳定的,哪些是不稳定的, 第二节给出若干证明。

§1 若干特殊 Banach 空间的定义及它们关于 $L_p(\mu,X)$的稳定性

Banach 空间的性质十分不理想,一方面由于它的拓扑结构是由一个一般的范数导入的。另一方面,由于我们一般考虑的是无限维空间,因此它的单位球 $U(X)$ 不是范数紧的。根据各种问题的研究需要, 我们必须引入一些特殊的 Banach 空间加以研究。自反空间就是单位球 $U(X)$为 w 紧的空间, RNP 空间就是向量测度的 Radon-Nikodym 定理成立的空间。1936 年,Clarkson 在研究 RNP 问题时发现, $U(X)$的几何性质与 RNP 有密切联系,

从而引入了一致凸空间(UR)。

定义 3.1.1 Banach 空间 X 称为一致凸的(UR)，如果对任何 $\varepsilon>0$，有 $\delta(\varepsilon)>0$，其中

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|:\right.$$

$$\left.\|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\},$$

它称为 X 的(一维)凸性模。

注 可以证明(请见参考书(L-T-Ⅱ)p.66)

$$\begin{aligned}\delta(\varepsilon)&=\inf\left\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|;\ \|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1,\|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\}\\&=\inf\left\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|;\ \|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1,\ \|x-y\|=\varepsilon\right\}\\&=\inf\left\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|;\|x\|=\|y\|=1,\|x-y\|=\varepsilon\right\}.\end{aligned}$$ □

与最佳逼近理论、不动点理论有关，又引入各种凸性。

定义 3.1.2 Banach 空间 X 称为局部一致凸的(LUR)，如果对任 $x\in S(X)$，$\varepsilon>0$，有 $\delta(x,\varepsilon)>0$，其中

$$\delta(x,\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|,\ \|y\|=1,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

注 容易证明 X 是 $LUR\Longleftrightarrow\forall x\in S(X)$，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\|x_n+x\|\longrightarrow 2$，有 $x_n\longrightarrow x$。 □

定义 3.1.3 Banach空间 X 称为弱局部一致凸的(wLUR)，如果对任 $x\in S(X)$，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\|x_n+x\|\longrightarrow 2$，有 $x_n\xrightarrow{w}x$。

定义 3.1.4 Banach空间X称为弱一致凸的(wUR)，如果对任$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\|x_n+y_n\|\longrightarrow 2$，有

$$x_n-y_n\xrightarrow{w}0.$$

定义 3.1.5 Banach 空间 X 称为各向一致凸的 (URED)，如果对任 $z\in X$，$z\neq 0$，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$x_n-y_n=\alpha_n z$，$\|x_n+y_n\|\longrightarrow 2$，有$\alpha_n\longrightarrow 0$。

注　URED空间是使每个有界集A的Chebyshev中心不多于一个点的那种空间(见(Ga-1),也见(Sw-1))。□

定义 3.1.6　Banach空间X称为中点局部一致凸的(MLUR),如果对任$x\in S(X)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$, $\|x_n+y_n-2x\|\longrightarrow 0$,有$x_n-y_n\longrightarrow 0$。

注　$x\in S(X)$称为$U(X)$的强端点,如果对任$\varepsilon>0$, $\exists\beta=\beta(x,\varepsilon)>0$,使得当$x_1,x_2\in S(X)$, $\left\|x-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right\|<\beta$时,有$\|x_1-x_2\|<\varepsilon$。

容易证明X是MLUR$\Longleftrightarrow S(X)$的每个点是$U(X)$的强端点。□

定义 3.1.7　设K是正整数, Banach空间X称为K一致圆形(KUR),如果对任$\varepsilon>0$,有$\delta^{(k)}(\varepsilon)>0$、其中$\delta^{(k)}(\varepsilon)=\inf$

$$\left\{1-\frac{1}{k+1}\left\|x_1+\cdots+x_{k+1}\right\|;\ \|x_i\|\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant k+1,\right.$$

$\left.A(x_1,\cdots,\ x_{k+1})\geqslant\varepsilon\right\}$,它称为$X$的$K$维凸性模,而

$$A(x_1,\cdots,x_{k+1})=\sup\left\{\begin{vmatrix}1&\cdots\cdots\cdots\cdots&1\\ f_1(x_1)&\cdots\cdots\cdots&f_1(x_{k+1})\\ \vdots&&\\ f_k(x_1)&\cdots\cdots\cdots&f_k(x_{k+1})\end{vmatrix};\ \begin{matrix}f_i\in S(X^*)\\ 1\leqslant i\leqslant k\end{matrix}\right\}$$

定义 3.1.8　设K为正整数,$K\geqslant 2$,Banach空间X称为K圆形(KR),如果对任$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$,

$$\lim_{n_1\cdots n_k\to\infty}\|x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}\|=K,$$

则$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是收敛的。

定义 3.1.9　Banach空间X称为严格凸(或圆形)(R),如果$x,y\in S(X)$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$。

注　容易看见在(R)空间中$S(X)$的每个点x是$U(X)$的端

点，即若 y、$z\in U(X)$，$x=\frac{1}{2}(y+z)$，则 $x=y=z$。严格凸空间在最佳逼近问题中起着重要作用。□

定义 3.1.10 Banach 空间 X 称为 H 空间，如果 $x\in S(X)$ $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，$x_n\xrightarrow{w}x$，则 $x_n\longrightarrow x$。

注 Banach 空间 X 称为 Kadec-Klee 范数空间(KK 空间)，如果单位球面 $S(X)$ 的 w 拓扑与范数拓扑是一致的。可以证明若 X 是可分 Bananch 空间，$l_1\not\hookrightarrow X$，则 X 是 H 空间当且仅当 X 是 KK 空间(证明要用深刻的 Rosenthal 的含 l_1 空间的特征定理(见第六章))。□

定义 3.1.11 Banach空间X称为一致Kadec-Klee范数空间(UKK)，如果对任 $\varepsilon>0$，$\exists\,\delta, 0<\delta<1$，使得当 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\text{sep}(x_n)\equiv\inf\{\|x_n-x_m\|;n\neq m\}>\varepsilon, x_n\xrightarrow{w}x_0$，则 $\|x_0\|<\delta$。

注 如果 X 是 UKK 空间，则对 X 的任何有界闭凸子集 B 关于X 的 ω 紧凸集 C 的 Chebyshev 中心是一个非空紧凸集(见参考书(俞-1)p.258)。□

定义 3.1.12 Banach 空间 X 称为接近一致凸的(NUC)，如果对任 $\varepsilon>0$，存在 $\delta, 0<\delta<1$，使得当 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，$\text{sep}(x_n)>\varepsilon$，有 $co(x_n)\cap(\|x\|<\delta)\neq\Phi$。

注 可以证明 X 是 UKK 且自反的$\Longleftrightarrow X$ 是 NUC.X是NUC $\Longrightarrow X$具正规结构(NS)(参见参考书(俞-1)p.234，p.259)。□

定义 3.1.13 Banach 空间 X 称为具有正规结构(NS)，如果对任何有界闭凸集 A，存在 $x\in A$，使 $\sup\{\|x-y\|: y\in A\}<\text{diam}A$。

注 定义中的点 $x\in A$ 称为 A 的非直径点。自反 NS 空间中每个有界闭凸集 A 上到自身的非扩张映象具不动点(见(Kr-1)或参考书(俞-1)p.260)。所以，正规结构概念在不动点理论中是一个重要的概念。□

定义 3.1.14 Bananch 空间 X 称为具有一致正规结构

(UNS)，如果存在$0<\delta<1$，使得对任意有界闭凸集A，存在$x\in A$，使$\sup\{\|x-y\|;y\in A\}<\delta \mathrm{diam} A$。

注　UNS$\Longrightarrow$自反+NS（见(B-1)或(M-1)）UNS空间中对一类比非扩张映象更广的映象具不动点（见(C-M-1)）。

UNS空间是否是超自反的（定义3.1.16）仍是一个Open问题。□

定义3.1.15　一个赋范空间Y称为在另一个赋范空间X内有限表示，如果对任意$\varepsilon>0$及Y的任何有限维子空间B，存在X的有限维子空间Z及$T:B\longrightarrow Z$的一个（满）线性同胚，使$\|T^{-1}\|\cdot\|T\|<1+\varepsilon$。

注　著名的Dvorestky-Rogert定理就是说Hilbert空间可以在每个Banach空间中有限表示（见第四章）。□

定义3.1.16　Banach空间X称为超自反的（Super-reflexive），如果任何在X中有限表示的Banach空间是自反的。

注　显然，超自反空间是自反的。□

定义3.1.17　Banach空间X称为亚自反的，如果

$$\dim X^{**}/X<+\infty.$$

注　若$\dim X^{**}/X=n$，则X称为序n的亚自反空间。□

定义3.1.18　Banach空间X称为具Banach-Saks性质(BSP)，如果对任$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列$(y_n)_{n=1}^{\infty}$，使$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}y_k\right\}_{n=1}^{\infty}$是收敛的，$X$称为具wBSP，如果对任意$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$x_n\xrightarrow{w}0$，存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列$(y_n)_{n=1}^{\infty}$，使$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right\}_{n=1}^{\infty}$是收敛的。

在研究概率论中的大数定理对取值Banach空间的随机变量是否成立的问题时，Beck引入了B凸的概念，并指出X是B凸的当且仅当“大数定理”成立（详见第五章）。

定义3.1.19　设n是正整数，且$n\geq 2$，Banach空间X称为一致非$l_1(n)$，如果存在$\varepsilon>0$，使

$$\sup\{\min\|x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n\|; (x_i)_{i=1}^n \subset U(X)\} < n(1-\varepsilon).$$

定义 3.1.20 Banach 空间 X 称为 B 凸的，如果它是一致非 $l_1(n)$，对某个正整数 $n \geqslant 2$。

定义 3.1.21 Banach 空间 X 称为 P 凸的，如果存在正整数 $n, n \geqslant 2$；及 $\varepsilon > 0$，使

$$\sup\{\min_{i \neq k}\|x_i - x_k\|; (x_i)_{i=1}^n \subset U(X)\} < 2 - \varepsilon.$$

在近期关于 RNP 研究中，最令人感兴趣的是 PC 空间和 CPC 空间。

定义 3.1.22 Banach 空间 X 称为 PC 空间，如果对任何有界 w 闭子集 A，存在 $x_0 \in A$，使恒等映象 $I:(A, w) \longrightarrow (A, \|\cdot\|)$ 在 x_0 点连续。

注 定义中 $x_0(\in A)$ 称为 A 的 PC 点，A 的全体 PC 点记作 PC-A。□

定义 3.1.23 Banach 空间 X 称为 CPC 空间，如果对任何有界闭凸集 A，PC-A$\neq$中。

定义 3.1.24 Banach 空间 X 称为 KMP 空间，如果对任何有界闭凸集 A，ext$A \neq$中，其中 ext$A$ 表示 A 的端点全体。

关于范数的可微性质较好的空间有如下定义：

定义 3.1.25 Banach 空间 X 称为光滑的(sm)(或 Gateaux 可微空间)，如果对每个 $x \in S(X), y \in S(X)$，

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

存在。

注 容易证明X是 sm 空间，当且仅当对每个 $x \in S(X)$ 有唯一的 $x^* \in S(X^*)$，使 $x^*(x) = 1$（即每点 $x \in S(X)$ 有唯一的支撑泛函）（见参考书(俞-1)p.223)。定义中极限值记为 $G_x(y)$。$G_x(\cdot)$ 称为范数在 x 点的 Gateaux 导数。□

定义 3.1.26 Bannch 空间 X 称为强光滑空间（或 Frechet 可微空间)(F)，如果对每个 $x \in S(X)$，

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{\sup\left\{\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda};\ y\in S(X)\right\}\right\}$$

存在。

注　定义中的极限记为 $F_x(\cdot)$，它称为范数在 x 点的Frechet导数。□

定义 3.1.27　Banach 空间 X 称为一致光滑（US）（或一致Frechet 可微空间），如果

$$\lim_{\lambda\to 0}\sup_{x\in S(X)}\sup_{y\in S(X)}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}$$

存在。

注　容易证明 X 是 UR$\Longleftrightarrow X^*$ 是 US，X^* 是 UR$\Longleftrightarrow$X 是 US，且 UR 空间、US 空间都是超自反的（请见参考书（俞—1）p.231（或见推论 5.5.2)。□

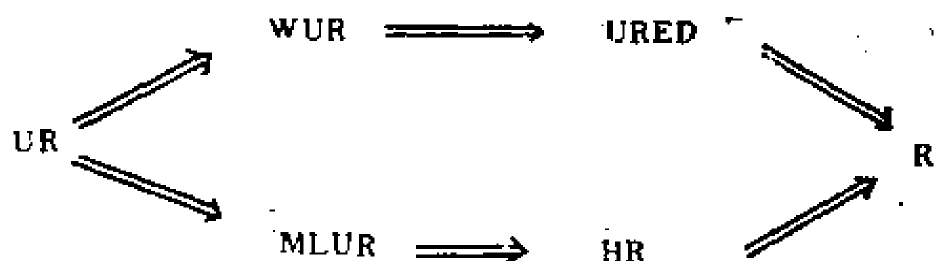
下面我们先简单叙述上面各种空间关系。

（Ⅰ）Hilbert 空间 $\Longrightarrow$UR 空间$\Longrightarrow$KUR 空间$\Longrightarrow(K+1)$UR 空间$\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow$超自反$\Longrightarrow$BSP$\Longrightarrow$自反$\Longrightarrow$亚自反$\Longrightarrow$RNP（请见参考书(俞-1)第 4、5、6 章)。

（Ⅱ）UR$\Longrightarrow P$ 凸$\Longrightarrow$超自反$\Longrightarrow B$ 凸（请见参考书（俞-1）第 4、5、6 章)。

（Ⅲ）UR$\Longrightarrow 2R\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow KR\Longrightarrow(K+1)$ R$\cdots\Longrightarrow$H+R（见(B-Y-1))

（Ⅳ）



(见参考书(俞-1)第 4、5 章)。

（Ⅴ）US$\Longrightarrow F\Longrightarrow$sm(见参考书(俞 -1)第 4、5 章)。

（Ⅶ）KUR$\Longrightarrow$NUC$\Longleftrightarrow$UKK＋自反$\Longrightarrow$NS（见参考书（俞-1）第4、5章）。

（Ⅷ）RNP$\Longleftrightarrow$PC＋KMP$\Longleftrightarrow$CPC＋KMP（见（R-1））。

如下空间关于$L_p(\mu,X)$是稳定的$(1<p<+\infty)$。

(1) UR。（定理3.2.21）

(2) LUR。（定理3.2.5）

(3) wLUR。（E-V-1）

(4) URED。（S-T-1）

(5) R。（定理3.2.2）

(6) MLUR。（定理3.2.7）

(7) B凸。（定理3.2.10）

(8) P凸。（俞-臧-1）

(9) 一致非$l_1(n)$。（定理3.2.9）

(10) sm。（定理3.2.11）

(11) F。（L-S-1）

(12) US。（定理（3.2.22）

(13) RNP。（定理3.2.19）

(14) 自反。（定理3.2.17）

(15) WCG。（定理3.2.18）

(16) 2R。（L-1）

(17) NS。（定理3.2.31）

(18) w序列完备空间对$L_1(\mu,X)$稳定。（T-1）

(19) $c_0 \not\subset X$。（Kw-1）

(20) $l_1 \not\subset X$。（Pi-1）

下列空间关于$L_p(\mu,X)$不稳定。$(1<p<+\infty)$

(1) H。（定理3.2.14）

(2) NUC。（定理3.2.12）

(3) KUR。（定理3.2.13）

(4) KMP。（定理3.2.24）

(5) BSP。(Sc-1)

(6) 亚自反。(定理 3.2.23)

下列空间关于 $L_p(\mu, X)$ 的稳定性问题仍未解决。($1<p<+\infty$)

(1) KR。($K\geqslant 3$)

(2) PC

(3) X 具无条件基

(4) wUR。(虽然,Smith & Turret(S-T-1)证明 X是 wUR 且 X^* 具 RNP,则 $L_p(\mu,X)$是 wUR。

注 关于 DP 空间,Andrews(A-1)证明 $l_1 \subset\!\!\!\to X$, X是 DP 空间则 $L_p(\mu,X)$是 DP 空间。□

§2 关于 $L_p(\mu, X)$稳定的性质

本节中不作特别声明,约定(Ω, Σ, μ)是有限(完备)测度空间(非负测度)。$1<p<+\infty$。

定理 3.2.1 设 $1<p<+\infty, f\in U(L_p(\mu,X))$,如果

$$\frac{f(t)}{\|f(t)\|}\in \operatorname{ext}U(X),$$

对 a、e 的 $t\in \operatorname{supp}(f)$, 其中 $\operatorname{supp}(f)=\{t; f(t)\neq 0\}$, 则

$$f\in \operatorname{ext}U(L_p(\mu,X)).$$

证明 若 $g,h\in L_p(\mu,X)$, $\|g\|=\|h\|=1$, 且 $f=\frac{1}{2}(g+h)$。由于

$$2=\left(\int_\Omega\|g+h\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_\Omega(\|g\|+\|h\|)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\left(\int_\Omega\|g\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\Omega\|h\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\|g\|+\|h\|=2.$$

根据 Mikowski 不等式等号成立的条件知,

$$\|g(t)\|\overset{\text{a.e}}{=\!=}\|h(t)\|.$$

因此 $\|g(t)\| = \|h(t)\| = \|f(t)\|$，对 a.e 的 t。事实上，否则，因 $\|2f(t)\| = \|g(t)+h(t)\| \leqslant \|g(t)\| + \|h(t)\| = 2\|h(t)\|$，故存在$\delta > 0$，使$\mu(B) > 0$，其中 $B = \{t; \|f(t)\|^p < \|h(t)\|^p - \delta\}$，因此，

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_\Omega \|f(t)\|^p d\mu = \int_{\Omega\setminus B} \|f(t)\|^p d\mu + \int_B \|f(t)\|^p d\mu \\
&\leqslant \int_{\Omega\setminus B} \|h(t)\|^p d\mu + \int_B (\|h(t)\|^p - \delta) d\mu \\
&= \int_\Omega \|h(t)\|^p d\mu - \delta\mu(B) \leqslant 1 - \delta \cdot \mu(B) < 1,
\end{aligned}
$$

矛盾。

因此，

$$
\frac{f(t)}{\|f(t)\|} = \frac{1}{2}\frac{g(t)+h(t)}{\|f(t)\|} = \frac{1}{2}\left(\frac{g(t)}{\|g(t)\|} + \frac{h(t)}{\|h(t)\|}\right),
$$

对 a.e 的 t 成立，由于$\dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$a.e是 $U(X)$的端点，故知 $f(t) = g(t) = h(t)$，对 a.e 的 t 成立，因此 $f \in \operatorname{ext}U(L_p(\mu, X))$。证毕。

定理 3.2.2 X 是 $R \Longleftrightarrow L_p(\mu, X)$是 R $(1 < p < +\infty)$。

证明 由定理 3.2.1 知必要性成立。另一方面，易见严格凸空间的子空间是严格凸的，且 X 是线性等距于 $L_p(\mu, X)$的子空间，所以充分性成立。证毕。

引理 3.2.3 若 $1 \leqslant p < +\infty$，$(f_n)_{n=1}^\infty \subset L_p(\mu, X)$，$f \in L_p(\mu, X)$，$\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$，$f_n(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(t)$，则 $f_n \longrightarrow f$。

证明 由于 $f_n(t) \xrightarrow{\text{a.e}} f(t)$故，$\|f_n(t)\| \xrightarrow{\text{a.e}} \|f(t)\|$，从而$\|f_n(t)\|^p \xrightarrow{\text{a.e}} \|f(t)\|^p$，由条件$\int_\Omega \|f_n(t)\|^p d\mu \longrightarrow \int_\Omega \|f(t)\|^p d\mu$。容易看到(例参考那汤松"实变函数论"中译本第 1 册。p.176)。

$$
\lim_{n\to\infty}\int_E \|f_n(t)\|^p d\mu = \int_E \|f(t)\|^p d\mu, \ \forall E \subset \Sigma.
$$

再由 Vitali-Hahn-Saks 定理(见那汤松"实变函数论"中译本第 1 册 p.176)知，$(\|f_n(t)\|^p)_{n=1}^\infty$是等度绝对连续的，即

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\ \sup_n \int_E \|f_n(t)\|^p d\mu = 0.$$

由于$f_n(t)\xrightarrow{\text{a.e}}f(t)$，再应用 Vitali 定理即得$f_n\longrightarrow f$。事实上，对任 $\varepsilon>0$，选 $\delta>0$，使得当 $\mu(E)<\delta$ 时，

$$\sup_n \int_E \|f_n(t)\|^p d\mu<\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}},\quad \int_E \|f(t)\|^p d\mu<\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

由 Eropof 定理，选 $E\in\Sigma$，$\mu(E)<\delta$，使

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup\{\|f_n(t)-f(t)\|;t\in\Omega\setminus E\}=0.$$

因此，存在N，使得当 $n>N$ 时，有

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E}\|f_n(t)-f(t)\|<\varepsilon.$$

故当 $n>N$ 时，

$$\int_{\Omega\setminus E}\|f_n(t)-f(t)\|^p d\mu\leqslant\varepsilon\mu(\Omega\setminus E)\leqslant\varepsilon\mu(\Omega).$$

$$\begin{aligned}\int_E \|f_n(t)-f(t)\|^p d\mu&\leqslant\int_E(\|f_n(t)\|+\|f(t)\|)^p d\mu\\ &\leqslant\Big(\Big(\int_E\|f_n(t)\|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad+\Big(\int_E\|f(t)\|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)^p\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

故当 $n>N$ 时，$\int_\Omega\|f_n(t)-f(t)\|^p d\mu\leqslant\varepsilon\mu(\Omega)+\varepsilon$。

这表明$f_n\longrightarrow f$。证毕。

定理 3.2.4 若$1<p<+\infty$，$f\in L_p(\mu,X)$，$\|f\|=1$；对 a.e 的 $t\in\text{supp}(f)$，$\dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$是$U(X)$的 LUR 点，则 $f(t)$是 $U(L_p(\mu,X))$ 的 LUR 点。

证明 我们知道 $x\in S(X)$称为 $U(X)$的 LUR 点，如果对任$(x_n)_{n=1}^\infty\subset S(X)$，$\|x_n+x\|\longrightarrow 2$，有 $x_n\longrightarrow x$。

设 $(f_n)_{n=1}^\infty\subset S(L_p(\mu,X))$，且 $\|f_n+f\|\longrightarrow 2$，则

$2=\lim_n\|f_n+f\|\leqslant\lim_n\|\|f_n(t)\|+\|f(t)\|\|_{L_p(\mu)}$

$$\leqslant \lim_n (\|f_n\| + \|f\|) = 2, \text{故} \lim_n \| \|f_n(t)\| + \|f(t)\| \|_{L_p(\mu)} = 2.$$

由于 $\|f_n(t)\|, \|f(t)\| \in S(L_p(\mu))$，众所周知，$L_p(\mu)$是一致凸的，$(1<p<+\infty)$（参见参考书（俞-1）$p.242$），故

$\|f_n(t)\| \xrightarrow{L_p(\mu)} \|f(t)\|$，（特别地，$\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$）(3.1)由 Riesz 定理，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$有子列（仍记作$(f_n)_{n=1}^{\infty}$）。使

$$\|f_n(t)\| \xrightarrow{\text{a.e}} \|f(t)\|. \quad (3.2)$$

另一方面，$4 \leqslant \lim_n (\|5f + 5f_n\| - \|2f + 4f_n\|)$

$$\leqslant \lim_n \|3f + f_n\| \leqslant \lim_n \|2\|f(t)\| + \|f(t) + f_n(t)\| \|_{L_p(\mu)}$$

$$\leqslant \lim_n (2\|f\| + \|f + f_n\|) = 4,$$

故 $\lim_n \|2\|f(t)\| + \|f(t) + f_n(t)\| \|_{L_p(\mu)} = 4$，即

$$\lim_n \left\| \|f(t)\| + \frac{1}{2}\|f(t) + f_n(t)\| \right\|_{L_p(\mu)} = 2.$$

由于 $\|f(t)\| \in S(L_p(\mu))$，

$$\frac{1}{2}\|f(t) + f_n(t)\| \in U(L_p(\mu)),$$

再根据 $L_p(\mu)$的一致凸性，有

$$\lim_n \left\| \frac{1}{2}\|f(t) + f_n(t)\| - \|f(t)\| \right\|_{L_p(\mu)} = 0,$$

再根据 Riesz 定理，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$有子列（仍记作 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$）使

$$\frac{1}{2}\|f_n(t) + f(t)\| \xrightarrow{\text{a.e}} \|f(t)\|,$$

由(3.2)式知，

$$\left\| \frac{f(t)}{\|f(t)\|} + \frac{f_n(t)}{\|f_n(t)\|} \right\| \longrightarrow 2,$$

对 a.e 的 $t \in \operatorname{supp}(f)$，但对 a.e 的 $t \in \operatorname{supp}(f)$，$\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ 是 LUR 点，故

$$\frac{f_n(t)}{\|f_n(t)\|} \longrightarrow \frac{f(t)}{\|f(t)\|},$$

对 a.e 的 $t\in\mathrm{supp}(f)$。再应用 (3.2)式，$f_n(t)\xrightarrow{\text{a.e}}f(t)$。由此，根据(3.1)式及引理 3.2.3 知，$\|f_n-f\|\longrightarrow 0$。

实际上，我们证明了 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 的任何子列有子列 $(f_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使 $\|f_{n_i}-f\|\longrightarrow 0$。从而，易知 $\|f_n-f\|\longrightarrow 0$。证毕。

定理 3.2.5 X 是 LUR$\Longleftrightarrow L_p(\mu,\ X)$ 是 LUR $(1<p<+\infty)$。

证明 由定理 3.2.4 及 LUR 空间的子空间仍为 LUR 空间即知定理成立。证毕。

定理 3.2.6 若 $f\in L_p(\mu,X)$，$\|f\|=1$，$\dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$是 $U(X)$ 的强端点，对 a.e 的 $t\in\mathrm{supp}(f)$，则 f 是 $U(L_p(\mu,X))$的强端点。

注 容易看到 $x\in S(X)$ 是 $U(X)$ 的强端点当且仅当对任意 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\|x\pm x_n\|\longrightarrow 1$，有 $x_n\longrightarrow 0$。□

证明 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset L_p(\mu,X)$，使 $\|f\pm f_n\|\longrightarrow 1$，则

$$\begin{aligned}2&=\lim_n(\|3f\|-\|f\pm f_n\|)\leqslant\lim_n\|2f\pm f_n\|\\&\leqslant\lim_n\big\|\,\|f(t)\pm f_n(t)\|+\|f(t)\|\,\big\|_{L_p(\mu)}\\&\leqslant\lim_n(\|f\pm f_n\|+\|f\|)=2,\end{aligned}$$

故

$$\lim_n\big\|\,\|f(t)\pm f_n(t)\|+\|f(t)\|\,\big\|_{L_p(\mu)}=2,$$

由于 $\|f(t)\|\in S(L_p(\mu))$，及 $L_p(\mu)$是一致凸的，$1<p<+\infty$，故

$$\Big\|\,\|f(t)\pm f_n(t)\|-\|f(t)\|\,\Big\|_{L_p(\mu)}\longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

从而

$$\|f+f_n\|\longrightarrow\|f\|. \tag{3.4}$$

由(3.3)式应用 Riesz 定理，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$有子列(仍记作$(f_n)_{n=1}^{\infty}$)使

$$\|f(t)\pm f_n(t)\|\xrightarrow{\text{a.e}}\|f(t)\|. \tag{3.5}$$

由上式知对 a.e 的 $t\in\mathrm{supp}(f)$，有

$$\left\|\frac{f(t)}{\|f(t)\|}\pm\frac{f_n(t)}{\|f(t)\|}\right\|\longrightarrow 1.$$

由条件，对 a.e 的 $t\in\mathrm{supp}(f)$，$\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$是 $U(X)$的强端点，故对a.e 的 $t\in\mathrm{supp}(f)$，

$$\frac{f_n(t)}{\|f(t)\|}\longrightarrow 0.$$

故 $f_n(t)\longrightarrow 0$，对 a.e 的 $t\in\mathrm{supp}(f)$。

由(3.5)式知 $f_n(t)\xrightarrow{\text{a.e}}0$，从而

$$f(t)\pm f_n(t)\xrightarrow{\text{a.e}}f(t).$$

由此及(3.4)式，应用引理 3.2.3 知，

$$f\pm f_n\longrightarrow f,$$

即 $f_n\longrightarrow 0$。

实际上，我们证明对 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 的任何子列有子列 $(f_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 使 $f_{n_i}\longrightarrow 0$，故 $f_n\longrightarrow 0$，即 f 为强端点。证毕。

定理 3.2.7 X 是 MLUR$\Longleftrightarrow L_p(\mu, X)$为 MLUR，$1<p<+\infty$。

证明 由定理 3.2.6 及 MLUK 空间的子空间仍为 MLUR 即得所要结论。证毕.

引理 3.2.8 若 $1<p<+\infty$，Banach 空间 X 是一致非 $l_1(n)$ 的，则存在一个常数 α，$0<\alpha<1$，使得若$(x_i)_{i=1}^{n}\subset X$，则

$$\Sigma\left\|\frac{x_1\pm\cdots\pm x_n}{n}\right\|^p\leqslant\frac{2^{n-1}\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p,$$

其中左边和式取一切 2^{n-1} 个符号选取。

证明 令

$$\sigma=\Sigma\left\|\frac{x_1\pm\cdots\pm x_n}{n}\right\|^p,$$

不失一般性，设 $\|x_1\|=1\geqslant\|x_j\|$，$j=2,\cdots,n$。

由于 X 是一致非 $l_1(n)$ 的，故 σ 的和式中至少有一项 $\leqslant(1+\varepsilon)^p$，对其它$2^{n-1}-1$项，利用三角不等式及函数 $|t|^p$ 的凸性，有

$$\sigma\leqslant(1-\varepsilon)+\frac{2^{n-1}-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right).$$

因此，

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{-1}\sigma\leqslant\left(1+\sum_{i=2}^{n}\|x_i\|^p\right)^{-1}(1-\varepsilon)+\frac{1}{n}(2^{n-1}-1).$$

(1) 当$\sum_{i=2}^{n}|x_i|^p\geqslant(n-1)(1-\varepsilon)$时，

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{-1}\sigma\leqslant\frac{1}{1+(n-1)(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)$$

$$+\frac{2^{n-1}-1}{n}\left(<\frac{2^{n-1}}{n}\right)$$

(2) 当$\sum_{i=2}^{n}\|x_i\|^p\leqslant(n-1)(1-\varepsilon)$时，则至少有一个 i, $2\leqslant i\leqslant n$，使 $\|x_i\|<1$。

研究函数 $\Phi(t)=|t|^p$，则 $\Phi(t)$是严格凸的，故若 $0\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant 1$，且至少有一个 i, $2\leqslant i\leqslant n$，使 $t_i<1$ 时，有

$$\left(\frac{1+t_2+\cdots t_n}{n}\right)^p<\frac{1}{n}(1+t_2^p+\cdots+t_n^p).$$

由于集

$$A=\left\{(t_2,\cdots,t_n)\in[0,1]^{n-1};\ \sum_{i=2}^{n}t_i^p\leqslant(n-1)(1-\varepsilon)\right\}$$

是紧的，故存在 $0<\beta<1$，使

$$\left(\frac{1+t_2+\cdots+t_n}{n}\right)^p<\frac{\beta}{n}\left(1+\sum_{i=2}^{n}t_i^p\right),$$

当 $(t_2,\cdots t_n)\in A$ 时，应用范数三角不等式及上述不等式，有

$$\sigma\leqslant 2^{n-1}\left(\frac{1+\|x_2\|+\cdots+\|x_n\|}{n}\right)^p$$

$$\leqslant\frac{2^{n-1}\beta}{n}\left(1+\sum_{i=2}^{n}\|x_i\|^p\right).$$

令 $\alpha=\max\left\{\beta,\ \left\{\frac{n}{2^{n-1}}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+(n-1)(1-\varepsilon)}+\frac{2^{n-1}-1}{n}\right)\right\}\right.$

即可，证毕。

定理 3.2.9 X 是一致非 $l_1(n) \Longleftrightarrow L_p(\mu,X)$ 是一致非 $l_1(n)$，$1<p<+\infty$。

证明 由于一致非 $l_1(n)$ 的子空间仍然是一致非 $l_1(n)$ 的，故只须证明必要性。

设 ε 是 X 为一致非 $l_1(n)$ 定义中的 ε。令 $f_1,\cdots f_n\in U(L_p(\mu,X))$，由引理 3.2.9 知，存在 $0<\alpha<1$，使对任 $t\in\Omega$，有

$$\Sigma\left\|\frac{f_1(t)\pm\cdots\pm f_n(t)}{n}\right\|^p\leqslant\frac{2^{n-1}\alpha}{n}\left(\sum_{i=1}^n\|f_i(t)\|^p\right),$$

将上式进行积分，得

$$\Sigma\left\|\frac{f_1\pm\cdots\pm f_n}{n}\right\|^p\leqslant 2^{n-1}\cdot\alpha,$$

故 $$\min\left\{\left\|\frac{f_1\pm\cdots\pm f_n}{n}\right\|^p\right\}<\alpha,\text{从而}$$

$$\min\{\|f_1\pm\cdots\pm f_n\|\}<\alpha^{\frac{1}{p}}\cdot n.$$

故 $L_p(\mu,X)$ 是一致非 $l_1(n)$，证毕。

定理 3.2.10 X 是 B 凸 $\Longleftrightarrow L_p(\mu,X)$ 是 B 凸。$1<p<+\infty$。

证明 由 B 凸空间的子空间仍是 B 凸的，根据 B 凸空间定义及定理 3.2.9 即得，证毕

定理 3.2.11 X 是光滑的 $\Longleftrightarrow L_p(\mu,X)$ 是光滑的，$1<p<+\infty$。

证明 由于光滑空间的子空间仍是光滑空间，故只须证明必要性。

令 $f,h\in S(L_p(\mu,X))$，只须证明

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f+\lambda h\|-\|f\|}{\lambda}\text{存在。}$$

易见只须证明

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f+\lambda h\|^p-\|f\|^p}{\lambda}\text{存在。}$$

令 $T_0=\{t\in\Omega;f(t)=0\}$，则

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T_0}(\|f(t)+\lambda h(t)\|^p-\|f(t)\|^p)d\mu$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T_0}|\lambda|^p\|h(t)\|^p d\mu$$

$$=\int_{T_0}\|h(t)\|^p\Big(\lim_{\lambda\to 0}|\lambda|^{p-1}\mathrm{sgn}\lambda\Big)d\mu=0.$$

对 $t\in\Omega\backslash T_0$，由于 X 是光滑的，故

$$\cdot\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f(t)+\lambda h(t)\|^p-\|f(t)\|^p}{t}$$

$$=p\|f(t)\|^{p-1}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f(t)+\lambda h(t)\|-\|f(t)\|}{\lambda}$$

$$=p\|f(t)\|^{p-1}G_{f(t)}(h(t)).$$

注意 $G_{f(t)}(\cdot)\in X^*$，且 $\|G_{f(t)}(\cdot)\|=1$（参见参考书（俞-1）p.223）。

令 $\psi_t(\lambda)=\|f(t)+\lambda h(t)\|^p$，因为 X 是光滑的，

$$\frac{d\psi_t(\lambda)}{d\lambda}=p\|f(t)+\lambda h(t)\|^{p-1}$$

$$\cdot\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\|f(t)+\lambda h(t)+\Delta\lambda h(t)\|-\|f(t)+\lambda h(t)\|}{\Delta\lambda}$$

$$=p\|f(t)+\lambda h(t)\|^{p-1}G_{f(t)+\lambda h(t)}(h(t)).$$

由中值定理知，

$$|\psi_t(\lambda)-\psi_t(0)|\leqslant|\lambda|\sup\left\{\frac{d\psi_t(\lambda)}{d\lambda}\Big|_a, a\text{ 在 }0\text{ 与 }\lambda\text{ 之间}\right\}.$$

故

$$|\|f(t)+\lambda h(t)\|^p-\|f(t)\|^p|\leqslant|\lambda|\sup\{p\|f(t)+ah(t)\|^{p-1}\cdot\|h(t)\|;\ a\text{ 在 }0\text{ 与 }\lambda\text{ 之间}\}\leqslant p|\lambda|\|h(t)\|(\|f(t)\|+|\lambda|\|h(t)\|)^{p-1}$$，从而当 $0<|\lambda|<1$ 时

$$\left|\frac{\|f(t)+\lambda h(t)\|^p-\|f(t)\|^p}{\lambda}\right|$$

$$\leqslant p(\|f(t)\|+\|h(t)\|)^{p-1}\|h(t)\|\in L_1(\mu)$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{\Omega\setminus T_0}\frac{\|f(t)+\lambda h(t)\|^p-\|f(t)\|^p}{\lambda}d\mu$$

$$=\int_{\Omega\setminus T_0}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f(t)+\lambda h(t)\|^p-\|f(t)\|^p}{\lambda}d\mu$$

$$=p\int_{\Omega\setminus T_0}\|f(t)\|^{p-1}G_{f(t)}(h(t))d\mu,$$

故

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f+th\|^p-\|f\|^p}{t}$$

$$=p\int_{\Omega\setminus T_0}\|f(t)\|^{p-1}G_{f(t)}(h(t))d\mu.$$

证毕。

定理 3.2.12 $1<p<+\infty$,

$L_p(\mu,X)$是 NUC$\Longrightarrow L_p(\mu,X)$是 UR。

注　我们所考虑的(Ω,Σ,μ)一般是非纯原子的情况（当然，如果在证明中没有用到这一性质时，结论对(Ω,Σ,μ)是纯原子的情况也成立），这个假设在本定理中是重要的，即若(Ω,Σ,μ)是非纯原子的，则 $L_p(\mu,X)$是 NUC$\Longrightarrow L_p(\mu,X)$是 UR。□

证明　根据上述注，我们不妨假设 Ω 具有一个子集S，使$\mu(S)=1$，且S不含原子。

令$\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$是支撑在$S$上的 Rademacher 函数列（可仿照第一章§3 关于[0,1]上 Rademacher 函数列定义，例将S分成两个不相交集S_1,S_2，使$S_1,S_2\in\Sigma,S=S_1\cup S_2,\mu(S_1)=\mu(S_2)=\frac{1}{2}$，令$r_1(t)=1$，当$t\in S_1$时；$r_1(t)=-1$当$t\in S_2$时，用这种方式继续定义$r_n(t)$）。

易见$\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$在$L_p(\mu)$中$w$收敛于 0。

任给$\varepsilon>0,x,\ y\in X,\ \|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon$。

定义　$f_n\in L_p(\mu,X)$,

$$f_n=\frac{(x+y)\chi_S+(x-y)r_n}{2},$$

由于 $\|f_n(t)\|=1$, $\forall t\in S$, 故 $\|f_n\|=1$. 且对 $n\neq m$,

$$\|f_n-f_m\|=\left\|\frac{x-y}{2}\right\|\cdot\|r_n-r_m\|_{L_p(\mu)}$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon\cdot 2^{-\frac{1}{p}},$$

且因 $\{r_n(t)\}$ 按 $\sigma(L_p(\mu),L_q(\mu))$ 收敛于 0,其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,故 $\{f_n\}$ 按 $\sigma(L_p(\mu,X),\ L_p(\mu,\ X))$ 收敛于 0(这里用到当 X 是自反时, $L_p(\mu,X)^*=L_q(\mu,X^*)$,见下面定理 3.2.16),由于 $L_p(\mu,X)$ 是 NUC 空间,故

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=\|f\|\leqslant 1-\delta,$$

其中 δ 为 $L_p(\mu,X)$ 是 NUC 的定义中相应於 $\varepsilon 2^{-\frac{1}{p}}$ 的 δ. 故 X 是 UR 空间.证毕.

注 由于 NUC$\not\Longrightarrow$UR, 故 NUC 关于 $L_p(\mu,X)$ 是不稳定的. □

定理 3.2.13 若 $1<p<+\infty$,则

$L_p(\mu,X)$是 KUR$\Longleftrightarrow L_p(\mu,X)$是 UR.

证明 由于 UR$\Longrightarrow$KUR,及 KUR$\Longrightarrow$NUC(见(俞-1)),根据定理 3.2.12 即知.证毕.

注 由于对 $K\geqslant 2$, KUR$\not\Longrightarrow$UR, 故对 $K\geqslant 2$, KUR 关于 $L_p(\mu,X)$是不稳定的. □

定理 3.2.14 $1<p<+\infty$,则

$L_p(\mu,X)$是 H$\Longrightarrow L_p(\mu,X)$是 R$\Longleftrightarrow X$ 是 R.

注 这个定理也用到假设(Ω,Σ,μ)不是纯原子的. □

证明 不妨设存在 $S\in\Sigma,\mu(S)=1,S$ 不含原子,令$\{r_n(t)\}$是支撑在 S 上的 Rademacher 函数列.

若 X 不是严格凸的,则存在 $x,y\in X,y\neq 0,\|x\pm y\|=1$,

定义 $f_n(t)=x\chi_S(t)+r_n(t)y$, $f(t)=x\chi_S(t)$, 则有 f_n, $f\in L_p(\mu,\ X)$, 且 $\|f_n\|=\|f\|=1$, $f_n(t)-f(t)=r_n(t)y$. 故

$\|f_n - f\| = \|y\| > 0, \forall n$.

又由于$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$按$L_p(\mu,X)$的w拓扑收敛于f,且因$L_p(\mu,X)$具H性质,故$\|f_n - f\| \longrightarrow 0$。矛盾。证毕。

注　由于$H \not\Rightarrow R$,故H关于$L_p(\mu,X)$不是稳定的. □

引理 3.2.15　若$1 \leqslant p < +\infty$,则$L_q(\mu, X^*)$线性等距于$L_p(\mu, X)^*$的子空间,其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$(当$p=1$时,$q=+\infty$)。

证明　不妨设$\mu(\Omega)=1$,

(1) 对$1<p<+\infty$,令$T\left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)(f) = \sum_{i=1}^n x_i^*(f)\chi_{E_i}$,$\forall f \in L_p(\mu,X)$,则$T$是$L_q(\mu,X^*)$中简单函数到$L_p(\mu,X)^*$的线性算子,下面证明$T$是等距,事实上,设$\left\|\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right\| = 1$,则

$$\left\|T\left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)\right\| = \sup\left\{\left|\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)(f) d\mu\right|; \|f\|=1\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\int_\Omega \left|\left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)(f)\right| d\mu; \|f\|=1\right\}$$

$$\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right\| = 1.$$

另一方面,对任$\varepsilon>0$,取$x_i \in S(X)$,使

$$x_i^*(x_i) \geqslant \|x_i^*\| - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{q-1}\mu(E_i)\right)^{-1},$$

则

$$\sum_{i=1}^n x_i \|x_i^*\|^{q-1}\chi_{E_i} \in L_p(\mu,X), \left\|\sum_{i=1}^n x_i \|x_i^*\|^{q-1}\chi_{E_i}\right\| = 1,$$

故

$$\left\|T\left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)\right\| \geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i \|x_i^*\|^{q-1}\chi_{E_i}\right) d\mu$$

$$\geqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^q \chi_{E_i} d\mu - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

由ε任意性,有

$$\left\|T\left(\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right)\right\| = 1 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i^* \chi_{E_i}\right\|.$$

由简单函数在 $L_q(\mu,X^*)$ 中稠即得所要结论。

(2) 对 $p=1$ 情况，由可数值可测函数在 $L_\infty(\mu,X^*)$ 中稠，仿上法可类似证明。证毕。

定理 3.2.16 若 $1\leqslant p<+\infty$，则对于任何有限测度空间 (Ω,Σ,μ)，$L_p(\mu,X)^*=L_q(\mu,X^*)$，当且仅当 X^* 具 RNP。

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（当 $p=1$ 时，$q=+\infty$）。

证明 "$\Longleftarrow$" 由引理 3.2.15，只须证当 X^* 具 RNP 时，$L_p(\mu,X)^*\subset L_q(\mu,X^*)$。

任取 $\Phi\in L_p(\mu,X^*)$，定义

$$G(E)(x)=\Phi(x\chi_E),\ \forall E\in\Sigma,\ x\in X,$$

则 $\|G(E)\|=\sup\{|G(E)(x)|;\|x\|\leqslant 1\}\leqslant\|\Phi\|\cdot\mu(E)^{\frac{1}{p}}$。因此，$G(E)\in X^*$，我们有 $|G|(\Omega)<+\infty$，事实上，任取分割 $\pi=(E_1,\cdots,E_n)$，及 $x_1,\cdots,x_n\in U(X)$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n}G(E_i)(x_i)\right|=\left|\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i}\right)\right|\leqslant\|\Phi\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i}\right\|_p$$

$$\leqslant\|\Phi\|\cdot\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

易见 $|G(\Omega)\leqslant\|\Phi\|\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$，因此 G 是 $\Sigma\longrightarrow X^*$ 的有界变差 μ 连续的向量测度，由于 X^* 具 RNP，因此，存在 $g\in L_1(\mu,X^*)$，使

$$G(E)=\int_E g d\mu,\ \forall E\in\Sigma.$$

取

$$(E_n)_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma,\ E_n\subset E_{n+1},\ \forall n,\ \Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

且 g 在每个 E_n 上有界，故对任何 n，$g\chi_{E_n}\in L_q(\mu,X^*)$，令

$$\Phi_n(f)=\int_\Omega g\chi_{E_n}(f)d\mu,\ \forall f\in L_p(\mu,X),$$

则 $\Phi_n\in L_p(\mu,X^*)$，且 $\Phi_n(f)=\Phi(f\chi_{E_n})$。从而 $\|\Phi_n\|\leqslant\|\Phi\|$ 即 $\|g\chi_{E_n}\|_q\leqslant\|\Phi\|$，由单调收敛定理知，$g\in L_q(\mu,X)$。令 $\Phi_g(f)=\int_\Omega gfd\mu,\ \forall f\in L_p(\mu,X)$，则 $\Phi_g\in L_p(\mu,X)^*$，且 Φ_g 与 Φ 在简单函

数上一致，从而 $\Phi_g=\Phi$。由此，即得

$$L_q(\mu,X^*)\cong L_p(\mu,X^*)。$$

“$\Longrightarrow$”设 $L_q(\mu,X^*)\cong L_p(\mu,X)^*$，设 $G:\Sigma\longrightarrow X^*$ 是有界变差 μ 连续的向量测度，且不妨设 $\|G(E)\|\leqslant\mu(E)$（如第二章中叙述的为了证明 G 具 RNP，只须证 $\frac{dG}{d|G|}$ 存在，且由条件

$$L_q(|G|,X^*)\cong L_p(|G|,X)^*)。$$

令

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}G(E_i)x_i,$$

则 Φ 是定义在 $L_p(\mu,X)$ 中简单函数上的线性函数，且

$$\left|\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i}\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}G(E_i)x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\mu(E_i)$$

$$\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{E_i}\right\|_p\mu(\Omega)^{\frac{1}{q}},$$

从而，Φ 可唯一延拓为 $L_p(\mu,X)^*$ 中元，仍记作 Φ。由假设 $L_p(\mu,X)^*\cong L_q(\mu,X^*)$，故存在 $g\in L_q(\mu,X^*)$，使

$$\Phi(f)=\int_\Omega fg\,d\mu,\ \forall f\in L_p(\mu,X),$$

特别有

$$G(E)=\Phi(\chi_E)=\int_E g\,d\mu,\ \forall E\in\Sigma.$$

即 G 具 RN 导数，故 X^* 具 RNP。证毕。

定理 3.2.17 若 $1<p<+\infty$，则

X 是自反的当且仅当 $L_p(\mu,X)$ 是自反的，

证明 由定理 3.2.16 即知。证毕。

定理 3.2.18 若 $1<p<+\infty$，X 是 WCG 的，则 $L_p(\mu,X)$ 也是 WCG 的。

证明 由推论 2.3.6，X 是 WCG 的当且仅当存在自反空间 R 及 1-1 的 $T:R\longrightarrow X$，使 $\overline{TR}=X$。由定理 3.2.17 知，$L_p(\mu,R)$ 是自反的。

定义 $\tilde{T}: L_p(\mu,R)\longrightarrow L_p(\mu,X)$，$(\tilde{T}f)(t)=Tf(t)$，$\forall t\in\Omega$。则易见 $\tilde{T}$ 是1-1的有界线性算子，且

$$\tilde{T}L_p(\mu,R)=L_p(\mu,X).$$

再应用定理2.3.6，即知，$L_p(\mu,X)$是WCG的。证毕。

注 可以证明 X 是WCG的，则 $L_1(\mu,X)$ 也是WCG的。事实上，考虑 $J_{2,1}: L_2(\mu,X)\longrightarrow L_1(\mu,X)$ 为自然嵌入映象，设 $\tilde{T}: L_2(\mu,R)\longrightarrow L_2(\mu,X)$ 如定理中的算子，则 $J_{2,1}\tilde{T}$ 即为所求 $L_2(\mu,R)\longrightarrow L_1(\mu,X)$ 的算子。从而 $L_1(\mu,X)$ 是WCG的。□

定理3.2.19 若 $1<p<+\infty$，则 X 具RNP，当且仅当，$L_p(\mu,X)$ 具RNP。

证明 只须证必要性。证 $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$ 是任意有限（完备）测度，$G:\Sigma_1\longrightarrow L_p(\mu,X)$ 是有界变差 μ_1 连续的向量测度，不失一般性，假设 $\|G(E)\|\leqslant\mu_1(E)$，$\forall E\in\Sigma_1$。

任取 Ω_1 的分割 $\pi_1=(E_1,\cdots E_n)$，Ω 的分割 $\pi=(F_1,\cdots F_m)$，令

$$f_{\pi_1,\pi}(t_1,t)=\sum_{E\in\pi_1}\sum_{F\in\pi}\frac{\int_F G(E)d\mu}{\mu_1(E)\mu(F)}\chi_E(t_1)\chi_F(t),$$

则易见 $(f_{\pi_1,\pi},\sigma(\pi_1,\pi))_{(\pi_1,\pi)}$ 是一个 $L_p(\mu_1\times\mu,X)$ 中鞅（其中 $\sigma(\pi_1,\pi)$ 是由 $\{E\times F;E\in\pi_1,F\in\pi\}$ 生成的 σ 代数）。

由于 $1<p<+\infty$，X具RNP，根据定理2.3.9，上述鞅是收敛的，如果我们证明它是 $L_p(\mu_1\times\mu,X)$ 有界的。

首先，由Hödel不等式，

$$\left\|\int_F G(E)d\mu\right\|^p=\left\|\int_F G(E)\chi_F d\mu\right\|^p$$

$$\leqslant\left(\int_\Omega\|G(E)\chi_F\|\cdot|\chi_F|d\mu\right)^p$$

$$\leqslant\|G(E)\chi_F\|^p_{L_p(\mu,X)}\mu(F)^{\frac{p}{q}},\text{ 其中}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

故

$$\|f_{\pi_1,\pi}\|^p_{L_p(\mu_1\times\mu,X)} = \sum_{E\in\pi_1}\sum_{F\in\pi}\frac{\left\|\int_F G(E)\,d\mu\right\|^p}{\mu_1^p(E)\mu^p(F)}\mu_1(E)\mu(F)$$

$$\leqslant \sum_{E\in\pi_1}\sum_{F\in\pi}\frac{\|G(E)\chi_F\|^p_{L_p(\mu,X)}}{\mu_1^p(E)}\mu(F)^{1+\frac{p}{q}-p}\mu_1(E)$$

$$= \sum_{E\in\pi_1}\sum_{F\in\pi}\frac{\|G(E)\chi_F\|^p_{L_p(\mu,X)}}{\mu_1^p(E)}\mu_1(E)$$

$$= \sum_{E\in\pi_1}\frac{\|G(E)\|^p_{L_p(\mu,X)}}{\mu_1^p(E)}\mu_1(E)$$

$$\leqslant \sum_{E\in\pi_1}\mu_1(E) = \mu_1(\Omega_1)$$

(因$\|G(E)\|_{L_p(\mu,X)}\leqslant\mu_1(E)$)。因此存在$f\in L_p(\mu_1\times\mu,X)$，使$f_{\pi_1,\pi}\xrightarrow{L_p(\mu_1\times\mu,X)} f$。因为$\int_{\Omega_1\times\Omega}\|f(t_1,t)\|^p d\mu_1\times\mu<+\infty$，故$f(t_1,\cdot)\in L_p(\mu,X)$，对 a·e 的 t。

令 $g(t_1)=f(t_1,\cdot)$（对$f(t_1,\cdot)\notin L_p(\mu,X)$的$t_1$规定$g(t_1)=0$），易见$g:\Omega_1\longrightarrow L_p(\mu,X)$ 是μ_1可测的，而且易见$g(t_1)\in L_1(\mu_1,L_p(\mu,X))$。

若$A\in\Sigma_1$，则

$$\int_A g\,d\mu_1=\lim_{\pi_1,\pi}\int_A\sum_{E\in\pi_1}\sum_{F\in\pi}\frac{\int_F G(E)\,d\mu}{\mu_1(E)\mu(F)}\chi_{E}\chi_F\,d\mu_1$$

$$=\lim_{\pi_1}\int_A\sum_{E\in\pi_1}\lim_{\pi}\left(\sum_{F\in\pi}\frac{\int_F G(E)\,d\mu}{\mu(F)}\chi_F\right)\frac{\chi_E}{\mu_1(E)}d\mu_1$$

$$=\lim_{\pi_1}\int_A\sum_{E\in\pi_1}\frac{G(E)}{\mu_1(E)}\chi_E\,d\mu_1=G(A).$$

其中

$$\left(\sum_{F\in\pi}\frac{\int_F G(E)\,d\mu}{\mu(F)}\chi_F,\sigma(\pi)\right)_\pi$$

是一个 $L_p(\mu,X)$ 鞅，它收敛于 $G(E)$。

因此，

$$G(A)=\int_A g d\mu_1, \forall A\in\Sigma_1,$$

即 $g=\dfrac{dG}{d\mu_1}$，故得 $L_p(\mu,X)$ 具 RNP。证毕。

下面我们证明 UR 关于 $L_p(\mu,X)$ 是稳定的，为此先证明一个引理，这个引理本身也十分重要。

引理 3.2.20 若 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一列一致凸的Banach 空间，如果它们具有共同凸性模，即对任意 $\varepsilon>0$，

$$\delta(\varepsilon)=\inf_n \delta_n(\varepsilon)>0,$$

其中 $\delta_n(\varepsilon)$ 表示 X_n 的凸性模，则 $X=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_p$ 是一致凸的，$1<p<+\infty$。

特别地，若 X 是 UR，则

$$l_p(X)=\{x=(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_n\in X,\ \|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\}$$

是 UR。$1<p<+\infty$。

证明　任取 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$，　$y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in X$，　$\|x\|=\|y\|=1$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$。

(1) 先考虑特殊情况：若 $\|x_n\|=\|y_n\|=a_n$，$\forall n$。

令 $c_n=\|x_n-y_n\|$，则

$$\|x_n+y_n\|\leqslant 2a_n\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right),$$

故

$$\|x+y\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

令 $\sigma=\left\{n;\ \dfrac{c_n}{a_n}>\dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$，则由(3.6)式，

$$\|x+y\| \leqslant 2\left(\sum_{n\in\sigma} a_n^p\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right)^p\right.$$

$$\left.+\sum_{n\in\sigma} a_n^p\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.7}$$

令 $\alpha=(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$，$\beta=(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$，

$$\alpha_n=\begin{cases} a_n\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right), & n\in\sigma \\ 0 & n\notin\sigma \end{cases},$$

$$\beta_n=\begin{cases} 0 & n\in\sigma \\ a_n\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right), & n\notin\sigma \end{cases}$$

则 α、$\beta\in l_p$，且

$$\|d\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|=1,$$

同样 $\|\beta\|\leqslant 1$. 并且由于当 $n\in\sigma$ 时 $\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\geqslant\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$，当 $n\notin\sigma$ 时，$c_n\leqslant\frac{\varepsilon}{4}a_n$，此外，对任何 n，$c_n\leqslant 2a_n$，故

$$\begin{aligned}
\|\alpha-\beta\| &\geqslant \left(\sum_{n\in\sigma} a_n^p\left(1-\delta\left(\frac{c_n}{a_n}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geqslant \left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\left(\sum_{n\in\sigma} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\left(\sum_{n\in\sigma} c_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\left(\varepsilon-\left(\sum_{n\notin\sigma} c_n^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4}\left(\sum_{n\notin\sigma} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4}\right) \\
&\geqslant \frac{3}{8}\varepsilon\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).
\end{aligned}$$

由于 l_p 是一致的，(从一致凸定义后的注)，有

$$\|\alpha+\beta\|\leqslant 2\left(1-\delta_p\left(\frac{3}{8}\varepsilon\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\right),$$

其中 $\delta_p(\cdot)$ 为 l_p 的凸性模。

由(3.7)式知，

$$\|x+y\|\leqslant 2(1-\eta(\varepsilon)),$$

其中

$$\eta(\varepsilon)=\delta_p\left(\frac{3}{8}\varepsilon\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right).$$

(2) 一般情况：令

$$z_n=\|x_n\|\frac{y_n}{\|y_n\|},$$

则 $\|x_n\|=\|z_n\|$, $\forall n$, 故 $\|z\|=1$, 其中 $z=(z_n)_{n=1}^{\infty}$。且

$$\|x-z\|\geqslant\|x-y\|-\|y-z\|\geqslant\varepsilon-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\|y_n\|-\|x_n\|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.8}$$

(a) 若

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\|y_n\|-\|x_n\|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

则

$$\|x+y\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant 2\left(1-\delta_p\left(\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right).$$

(b) 若

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\|y_n\|-\|x_n\|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

则由于 $\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, 根据(3.8)式有

$$\|x-z\|\geqslant\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2},$$

由(1)的结论有

$$\|x+z\|\leqslant 2\left(1-\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

又

$$\|y-z\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\,\|y_n\|-\|x_n\|\,\Big|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\|x+z\|+\|y-z\|\leqslant 2\left(1-\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

令

$$\eta'(\varepsilon)=\min\left(\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\eta(\varepsilon)\right)\ \left(=\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

即知 X 是UR。证毕。

定理 3.2.21 若 $1<p<+\infty$，则 X 是 UR 当且仅当 $L_p(\mu,X)$是 UR。

证明 由于 UR 空间的子空间是 UR，故只须证明必要性。

设 X 是 UR，由引理 3.2.20，$l_p(X)$是 UR，设 $l_p(X)$的凸性模为 $\delta(\varepsilon)$。不妨设 $\mu(\Omega)=1$。

任取 $f,g\in L_p(\mu,X)$，$\|f\|\leqslant1$，$\|g\|\leqslant1$，$\|f-g\|\geqslant\varepsilon$。取可数值可测函数 f'、g'，使 $\|f'\|\leqslant1$，$\|g'\|\leqslant1$，

$$\|f-f'\|\leqslant\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad \|g-g'\|\leqslant\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

取定Ω的一个可数分割$(E_n)_{n=1}^{\infty}$（即 $E_n\cap E_m=\phi,n\neq m,E_n\in\Sigma$，$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$），使

$$f'=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\chi_{E_j},\qquad g'=\sum_{j=1}^{\infty}y_j\chi_{E_j},$$

其中 $x_j,y_j\in X$。

由 $L_p(\mu,X)$范数定义知，

$$\|f'\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^p\mu(E_j)\right)^{\frac{1}{p}},\quad \|g'\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|y_j\|^p\mu(E_j)\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f'-g'\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j-y_j\|^p\mu(E_j)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f'+g'\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j+y_j\|^p\mu(E_j)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

故

$$\alpha=(x_j\mu(E_j)^{\frac{1}{p}})_{j=1}^{\infty},\ \beta=(y_j\mu(E_j)^{\frac{1}{p}})_{j=1}^{\infty}\in l_p(X),$$

且 $\|\alpha\|\leqslant 1$, $\|\beta\|\leqslant 1$,

$$\|\alpha-\beta\|=\|f'-g'\|\geqslant\|f-g\|-\|f-f'\|-\|g-g'\|$$

$$\geqslant\varepsilon-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad\left(因\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由于 $l_p(X)$ 是一致凸的，它的凸性模为 $\delta(\cdot)$，则

$$\|f'+g'\|=\|\alpha+\beta\|\leqslant 2\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

从而

$$\|f+g\|\leqslant\|f'+g'\|+\|f-f'\|+\|g-g'\|$$

$$\leqslant 2\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{3}{4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

令

$$\eta(\varepsilon)=\frac{3}{4}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

即知 $L_p(\mu,X)$ 是 UR。证毕。

定理 3.2.22 若 $1<p<+\infty$，则 X 是 US，当且仅当 $L_p(\mu,X)$ 是 US。

证明 因为 X 是 US 当且仅当 X^* 是 UR，且 US 空间是自反的，根据定理 3.2.21 及定理 3.2.17 即得所要证的结论。证毕。

定理 3.2.23 若 $1<p<+\infty$，且 $L_p(\mu)$ 是无限维的，$L_p(\mu,X)$ 是亚自反的，则 X 是自反的。

证明 设 $L_p(\mu,X)$ 是亚自反的，则由于亚自反空间的子空间

也是亚自反的，X 也是亚自反的，从而 X^*、X^{**}具 RNP（见参考书(俞-1)$p.199$，$p.328$）。由定理 3.2.16 知，$L_p(\mu, X)^{**} \cong L_p(\mu, X^{**})$，故

$$L_p(\mu,X)^{**}/L_p(\mu,X) \cong L_p(\mu,X^{**})/L_p(\mu,X)$$
$$\approx L_p(\mu,X \oplus R^n)/L_p(\mu,X) \cong L_p(\mu,X) \oplus L_p(\mu,R^n)/L_p(\mu,X)$$
$$\cong L_p(\mu,X) \oplus L_p(\mu) \oplus \cdots \oplus L_p(\mu)/L_p(\mu,X).$$

由于 $L_p(\mu)$为无限维，及 $L_p(\mu, X)$ 亚自反，知上式中 $n=0$，即X 是自反的。证毕。

定理 3.2.24 若 $1<p<+\infty$，则

$$L_p(\mu,X)\text{具 KMP} \Longleftrightarrow L_p(\mu,X)\text{具 RNP}.$$

证明 Schachermayer(Sc-2)（也见（N-1））证明 $l_2(X)$是 KMP，则 X 是 RNP 空间，修改 Neidinge(N-1)的证明立即可得 $l_p(X)$ 是 KMP，则 X 是 RNP 空间，但易见 $l_p(X)$ 线性等距于 $L_p(\mu, X)$的一个子空间，故由KMP空间的子空间仍是 KMP 立即知道，若 $L_p(\mu,X)$是 KMP 则 X 具 RNP。证毕。

注 $L_p(\mu,X)$的 KMP 稳定性等价于著名的Open 问题：RNP 与 KMP 是否等价(已知 RNP$\Longrightarrow$KMP)。□

为了得到正规结构(NS)关于 $L_p(\mu, X)$的稳定性，我们需要几个引理。

前面已经定义 Banach 空间 X 称为具 NS，如果 X 的每个有界闭凸集 A，$\exists x\in A$，使

$$\sup\{\|x-y\|;y\in A\}<\text{diam}A=\{\|y-z\|:y,z\in A\},$$

这样的点 $x\in A$ 称为 A 的非直径点。

定义 3.2.1 Banach 空间 X 中子集 A 称为具 NS，如果对 A 中任何有界闭凸集 C，C 具有一个非直径点。

定义 3.2.2 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}(\subset X)$称为直径序列，如果 $\text{diam}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}<+\infty$，且

$$\lim_n\|x_n-x\|=\text{diam}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall x\in co(x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

定义 3.2.3 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}(\subset X)$称为极限常数序列，如果

$$\lim_n \|x_n - x\| = a > 0,\ \forall x \in co(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

(其中 a 为有限数)。

定理 3.2.25 设 A 是 Banach 空间 X 的闭子集,则 TFAE:

(1) A 具 NS。

(2) A 具 (NS1), 即 A 中不存在直径序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $co(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$。

(3) A 具(NS2),即 A 中不存在极限常数序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $co(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$。

(4) A 具(NS3),即不存在有界序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,使$co(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$,且

$$\lim_n \|x_n - x_k\| = \lim_n \|x_n - \bar{x}_l\| > 0, \forall k, l \in N,$$

其中

$$\bar{x}_l = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} x_i.$$

证明 (NS) $\Longrightarrow$ (NS1)若存在直径序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,使 $co(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$,则对任 $x \in co(x_n)_{n=1}^{\infty}$,有

$$\sup\{\|x-y\|; y \in co(x_n)_{n=1}^{\infty}\} \geqslant \sup_n \|x - x_n\|$$

$$\geqslant \lim_n \|x - x_n\| = \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty} = \operatorname{diam} \overline{co}(x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

从而

$$\inf_{x \in \overline{co}(x_n)_{n=1}^{\infty}} \sup_{y \in \overline{co}(x_n)_{n=1}^{\infty}} \|x - y\| = \operatorname{diam} \overline{co}(x_n)_{n=1}^{\infty},$$

故 A 不具 NS. 证毕。

(NS1) $\Longrightarrow$ (NS) 若 A 不具 NS, 则存在 A 的有界闭凸子集 A_1,使得任 $x \in A_1$ 都是 A_1 的直径点,即任 $x \in A_1$,

$$\sup_{y \in A_1} \|x - y\| = \operatorname{diam}(A_1).$$

任取 $x_1 \in A_1$, $\exists x_2 \in A_1$,使 $\|x_1 - x_2\| > \operatorname{diam}(A_1) - 1$,因

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in A_1,\ \exists x_3 \in A_1,$$

使

$$\left\|x_3-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right\|>\operatorname{diam}(A_1)-\frac{1}{2^2},$$

继续下去，一般地，因

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\in A_1,\ \exists x_{n+1}\in A_1,$$

使

$$\left\|x_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|>\operatorname{diam}(A_1)-\frac{1}{n^2}.$$

根据构造法，对任

$$x=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x_i\in co(x_k)_{k=1}^{\infty}$$

(其中 $\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{l}x_i=1$)，　令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\lambda_i$，

对任何固定 n，当 $n>l$ 时，令 $\lambda_{l+1}=\cdots=\lambda_n=0$，则

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x_i\right\|&=\left\|x_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right\|\\&\geqslant\lambda_n\left\|x_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|-\sum_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)\left\|x_{n+1}-x_i\right\|\\&\geqslant\lambda n\left((\operatorname{diam}(A_1)-\frac{1}{n^2}\right)-n\lambda\operatorname{diam}(A_1)+\operatorname{diam}(A_1)\\&=\operatorname{diam}(A_1)-\frac{\lambda}{n}\geqslant\operatorname{diam}(A_1)-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

从而对任 $x\in co(x_n)_{n=1}^{\infty}$，

$$\lim_n\|x_n-x\|=\operatorname{diam}(A_1)=\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty},$$

即 A 中存在直径序列，即 A 非(NS1)。证毕。

(NS2) $\Longrightarrow$ (NS1) 显然。

(NS1) $\Longrightarrow$ (NS2) 设存在极限常数序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$co(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A,$$

设

$$\lim_n\|x_n-x\|=a,\quad\forall x\in co(x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

可选 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列$(u_n)_{n=1}^{\infty}$，使

$$\|u_{n+1}-u_k\|\leqslant a\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \forall n\geqslant k,$$

令

$$y_n=\frac{n}{n+1}u_{n+1}+\frac{1}{n+1}u_1,$$

则

$$\|y_n-y_k\|=\left\|\frac{n}{n+1}u_{n+1}+\frac{1}{n+1}u_1-\frac{k}{k+1}u_{k+1}-\frac{1}{k+1}u_1\right\|$$

$$=\left\|\frac{k}{k+1}(u_{n+1}-u_{k+1})+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n+1}\right)\left((u_{n+1}-u_1\right)\right\|$$

$$\leqslant\left(\frac{k}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n+1}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)a=a,\ \forall n\geqslant k.$$

且对

$$\alpha_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,$$

$$\lim_n\left\|y_n-\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\right\|=\lim_n\left\|\frac{n}{n+1}u_{n+1}+\frac{1}{n}u_1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\right\|$$

$$=\lim_n\left\|u_{n+1}+\frac{1}{n}(u_1-u_{n+1})-\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\right\|$$

$$=\lim_n\left\|u_{n+1}-\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\right\|$$

$$=\lim_n\left\|x_n-\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\right\|=a.$$

（最后一式是由于 $y_i\in co(x_n)_{n=1}^{\infty}$，故

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_iy_i\in co(x_n)_{n=1}^{\infty}).$$

从而

$$\lim_n\|y-y_n\|=a=\operatorname{diam}(y_n)_{n=1}^{\infty},\quad \forall y\in co(y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

即$(y_n)_{n=1}^{\infty}$是直径序列，且 $co(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset co(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$. 证毕。

(NS3) $\Longrightarrow$ (NS2) 显然。

(NS2)$\Longrightarrow$(NS3)　若存在有界序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，使$co(x_n)_{n=1}^{\infty}$且

$$a=\lim_n\|x_n-x_k\|=\lim_n\|x_n-\bar{x}_l\|>0,\forall k,l\in N.$$

下面要证，对任$x=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i$，有$\lim_n\|x_n-x\|=a$，其中$\alpha_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i=1$。

取$\lambda=\max_{1\leq i\leq l}\alpha_i$，则

$$a=\lim_n\|x_n-\bar{x}_l\|\leqslant\frac{1}{\lambda l}\lim_n\left(\|x_n-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i\|+\sum_{i=1}^{l}(\lambda-\lambda_i)\|x_n-x_i\|\right)$$

$$=\frac{l\lambda-1}{\lambda l}a+\frac{1}{\lambda l}\lim_n\|x_n-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i\|,$$

故

$$a\leqslant\lim_n\|x_n-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i\|$$

$$\leqslant\overline{\lim_n}\left\|x_n-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|\leqslant a,$$

所以，

$$\lim_n\left\|x_n-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i\right\|=a,$$

即$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是极限常数序列，且$co(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$。证毕。

定理 3.2.26　若$(X_i)_{i=1}^{\infty}$是一列具 NS 的 Banach 空间，$1<p<\infty$，则$X=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\oplus X_i\right)_p$具 NS。

证明　若X不具 NS，由引理 3.2.25，存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使

$$\lim_n\|x_n-x\|=\mathrm{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}>0,\quad\forall x\in co(x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

我们可选子列(仍记为$(x_n)_{n=1}^{\infty}$)，使对一切$k\in N$，

$$z_n(i)=\lim_n\|x_n(i)-x_k(i)\|,\quad\forall i\in N.$$

其中$x_n=(x_n(i))_{i=1}^{\infty}$.

我们说，必存在i_0、k_0，使$z_{k_0}(i_0)\neq 0$。事实上，否则$\forall i$，$\forall k$，$z_k(i)=0$，从而$x_n(i)\longrightarrow x_k(i)$，$\forall i$、$k$，故$x_k(i)=x_l(i)$，$\forall k,l,i$，

$\therefore x_k = x_l, \forall k, l$, 这与 $\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty} > 0$ 矛盾!

考虑 X_{i_0} 中 $(x_n(i_0))_{n=1}^{\infty}$ 这个序列, 对任 $x(i_0) \in co(x_n(i_0))_{n=1}^{\infty}$, 取

$$y = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j, \ \alpha_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j = 1,$$

且 $x(i_0) = y(i_0)$, 则

$$\|(\|x_n(i) - x_{k_0}(i)\|)_{i=1}^{\infty}\|_{l_p} = \|x_n - x_{k_0}\| \longrightarrow \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty},$$

$$\|(\|x_n(i) - y(i)\|)_{i=1}^{\infty}\|_{l_p} = \|x_n - y\| \longrightarrow \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(\|x_n(i) - x_{k_0}(i)\|)_{i=1}^{\infty} + \frac{1}{2}(\|x_n(i) - y(i)\|)_{i=1}^{\infty}\right\|_{l_p}$$

$$\geqslant \left\|x_n - \frac{1}{2}(x_{k_0} + y)\right\|,$$

故

$$\left\|\frac{1}{2}(\|x_n(i) - x_{k_0}(i)\|)_{i=1}^{\infty} + \frac{1}{2}(\|x_n(i) - y(i)\|)_{i=1}^{\infty}\right\|_{l_p} \longrightarrow \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

从而由 l_p 的一致凸性(易见X是一致凸的当且仅当对任何 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset X, \ \|x_n\| \longrightarrow a, \ \|y_n\| \longrightarrow a, \ \frac{1}{2}\|x_n + y_n\| \longrightarrow a,$$

有 $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$)知,

$$\|x_n(i) - x_{k_0}(i)\| - \|x_n(i) - y(i)\| \longrightarrow 0, \forall i,$$

故

$$\lim_n \|x_n(i_0) - y(i_0)\| = \lim_n \|x_n(i_0) - x_{k_0}(i_0)\| = z_{k_0}(i_0),$$

即

$$\lim_n \|x_n(i_0) - x(i_0)\| = z_{k_0}(i_0), \quad \forall x(i_0) \in co(x_n(i_0))_{n=1}^{\infty},$$

这与 X_{i_0} 具 NS, 从而具(NS2)矛盾. 证毕.

为了转到 $L_p(\mu, X)$的 NS, 我们还需要几个引理.

引理 3.2.27 设 $\varepsilon > 0$, $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \subset X$, $\|x_{n+1} - \bar{x}_n\| > \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) - \varepsilon$, 则

$$d(co(x_i)_{i=1}^{n}, x_{n+1}) \geqslant \mathrm{diam}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) - n\varepsilon,$$

其中

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

证明　任取$y=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in co(x_i)_{i=1}^{n}$(其中 $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$).

令

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$
$$y_2 = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \cdots + \alpha_1 x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = \alpha_n x_1 + \alpha_1 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_n,$$

则 $(y_j)_{j=1}^{n} \subset co(x_i)_{i=1}^{n}$，且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

若

$$\|x_{n+1} - y\| < \mathrm{diam}(x_1, \cdots, x_{n+1}) - n\varepsilon,$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(x_i)_{i=1}^{n+1} - \varepsilon < \|x_{n+1} - \bar{x}_n\| &= \|x_{n+1} - \bar{y}_n\| \\
&= \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{n+1} - y_j)\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\|x_{n+1} - y_j\| \\
&< \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(x_i)_{i=1}^{n+1} + \frac{1}{n}\mathrm{diam}(x_i)_{i=1}^{n+1} - \varepsilon. \\
&= \mathrm{diam}(x_i)_{i=1}^{n+1} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

矛盾.证毕.

若 $(x_i)_{i=1}^{n+1} \subset X$, 记

$$\Delta\Sigma_n^p(x_i) = \sum_{j=1}^{n}\|x_{n+1} - x_j\|^p - n\|x_{n+1} - \bar{x}_n\|^p$$

引理 3.2.28　若 $(x_i)_{i=1}^{n+1} \subset X$, $(x_{n_1}, \cdots, x_{n_k}) \subset (x_1, \cdots, x_n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, 则 $\Delta\Sigma^p(x_{n_1}, \cdots x_{n_k}, x_{n+1}) \leqslant \Delta\Sigma^p(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$, 即

$$\sum_{j=1}^{k}\|x_{n+1}-x_{n_j}\|^p-k\left\|x_{n+1}-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_{n_j}\right\|^p$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left\|x_{n+1}-x_j\right\|^p-n\left\|x_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|^p.$$

证明

$$\left\|x_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|^p=\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{n+1}-x_j)\right\|^p$$

$$=\left\|\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}(x_{n+1}-x_{n_j})\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n-k}{n}\left(\frac{1}{n-k}\left(\sum_{j\neq n_1,\cdots,n_k}(x_{n+1}-x_j)\right)\right)\right\|^p$$

$$\leqslant\frac{k}{n}\left\|\frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}(x_{n+1}-x_{n_j})\right)\right\|^p$$

$$+\frac{n-k}{n}\left\|\frac{1}{n-k}\left(\sum_{j\neq n_1,\cdots,n_k}(x_{n+1}-x_j)\right)\right\|^p$$

(根据$\|\cdot\|^p$凸性)

$$\leqslant\frac{k}{n}\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(x_{n+1}-x_{n_j})\right\|^p$$

$$+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{n-k}\sum_{j\neq n_1,\cdots,n_k}\|x_{n+1}-x_j\|^p$$

(根据$\|\cdot\|^p$凸性)

$$=\frac{k}{n}\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(x_{n+1}-x_{nj})\right\|^p$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{n\neq n_1,\cdots,n_k}\|x_{n+1}-x_j\|^p$$

故

$$n\left\|x_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|^p$$

$$\leqslant k\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(x_{n+1}-x_{n_j})\right\|^p+\sum_{j\neq n_1,\cdots,n_k}\|x_{n+1}-x_j\|^p,$$

从而

$$\sum_{j=1}^{k}\|x_{n+1}-x_{n_j}\|^p-k\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(x_{n+1}-x_{n_j})\right\|^p$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|x_{n+1}-x_j\|^p-n\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{n+1}-x_j)\right\|^p.$$

证毕。

注　这个引理表明取子列后 $\Delta\Sigma^p(\cdot)$ 变小。□

引理 3.2.29　若 $1\leqslant p<+\infty$，则 TFAE：

(1) X 不具 NS。

(2) 对每个 $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$，$\varepsilon_n\searrow 0$（递减趋于 0），存在有界序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，使

$\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}=\lim\limits_{n} d(co(x_i)_{i=1}^{n},x_{n+1})$，$\Delta\Sigma_n^p(x_i)<\varepsilon_n$。

(3) 存在 $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$，$\varepsilon_n\searrow 0$，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $\Delta\Sigma_n^p(x_i)<\varepsilon_n$，且

$0<\lim\limits_{n}\|x_{n+1}-x_k\|=\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}<+\infty$，$\forall k$。

证明(1) $\Longrightarrow$ (2)　若 X 不具 NS，设 $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $\varepsilon_n\searrow 0$。由引理 3.2.25 的证明知，可取有界序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使

$$\operatorname{dist}(co(x_i)_{i=1}^{n},x_{n+1})>\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}-\alpha_n,$$

其中

$$\alpha_n=\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}-\left((\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty})^p-\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

故

$$0<\Delta\Sigma_n^p(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\|x_{n+1}-x_j\|^p-n\|x_{n+1}-\bar{x}_n\|^p$$
$$<n(\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty})^p-n(\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}-\alpha_n)^p$$
$$=n(\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty})^p-n(\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty})^p+\varepsilon_n=\varepsilon_n.$$

证毕。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　由条件(2)知，存在 $\varepsilon_n\searrow 0$，及有界序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $\Delta\Sigma_n^p(x_i)<\varepsilon_n$，且 $0<\lim\limits_{n} d(x_{n+1},co(x_i)_{i=1}^{n})=\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}<+\infty$，故对一切 k，

$$0<\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}=\lim_{n} d(x_{n+1},co(x_i)_{i=1}^{n})$$

$$\leqslant \lim_n d(x_{n+1},(x_i)_{i=1}^{n}) \leqslant \lim_n \|x_{n+1}-x_k\| \leqslant \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$<+\infty$，故

$$\lim_n \|x_{n+1}-x_k\| = \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}, \forall k,$$

即(3)成立。证毕。

(3) $\Longrightarrow$ (1) 若存在$(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$，$\varepsilon_n \searrow 0$，$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$，使得$\Delta\Sigma_n^p(x_i)$ $<\varepsilon_n$，且

$$0<\lim_n \|x_{n+1}-x_k\| = \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}<+\infty,$$

固定k，对$m \geqslant k$，由引理 3.2.28 有，

$$0<\sum_{j=1}^{k}\|x_{m+1}-x_j\|^p - k\|x_{m+1}-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j\|^p \leqslant \Delta\Sigma_m^p(x_i) \leqslant \varepsilon_m,$$

令$m \longrightarrow \infty$，则

$$0 \leqslant k(\operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty})^p - k\lim_{m\to\infty}\|x_{m+1}-\bar{x}_k\| = 0.$$

故

$$\lim_m \|x_{m+1}-\bar{x}_k\| = \operatorname{diam}(x_n)_{n=1}^{\infty}, \forall k.$$

由定理 3.2.25 知，X不具(NS3)，从而X不具 NS。证毕。

引理 3.2.30 若$1 \leqslant p<+\infty$，$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$，

$$\lim_n \|x_{n+1}-x_k\| = M>0,\ \forall k; \lim_n \Delta\Sigma_n^p(x_i) = 0,$$

则

$$\lim_n \left\| x_{n+1}-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j \right\| = M,\ \forall k.$$

证明 固定k，由引理 3.2.28 知

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\|x_{n+1}-x_j\|^p - \|x_{n+1}-\bar{x}_k\|^p \leqslant \frac{1}{k}\Delta\Sigma_n^p(x_i),$$

故

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\|x_{n+1}-x_j\|^p - \frac{1}{k}\Delta\Sigma_n^p(x_i)$$

$$\leqslant \|x_{k+1}-\bar{x}_k\|^p \leqslant \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\|x_{n+1}-x_j\|^p$$

（最后一个不等式由 $\|\cdot\|^p$ 的凸性得到）。因此，

$$M^p \leqslant \lim_n \|x_{n+1} - \bar{x}_k\|^p \leqslant M^p,$$

故

$$\lim_n \|x_{n+1} - \bar{x}_k\| = M.$$

证毕。

定理 3.2.31 设(Ω, Σ, μ)是任何测度空间，$1 < p < +\infty$，则 X 具 NS，当且仅当 $L_p(\mu, X)$具 NS。

证明 只须证必要性，由于正规结构是序列决定的，且对每个 $f \in L_p(\mu, X)$，f 具 σ 有限支撑，故仅考虑 σ 有限测度 μ 即可，但对任何 σ 有限测度 μ，有

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

其中 μ_1 为可数原子测度，μ_2 为 σ 有限非原子测度，此时有

$$L_p(\mu, X) = l_p(\mu_1, X) \oplus L_p(\mu_2, X))_p,$$

由定理 3.2.26 知，只须证 $L_p(\mu, X)$具 NS，其中 μ 是 σ 有限非原子测度，但若 μ 是 σ 有限测度，则

$$L_p(\mu, X) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus L_p(\mu_i, X)\right)_p,$$

其中 μ_i 为有限测度。

再由定理 3.2.26可知，只须证明 μ 是有限非原子测度时，$L_p(\mu, X)$具 NS。

下面不妨假设 (Ω, Σ, μ) 是不含原子的概率测度空间（即 $\mu(\Omega) = 1$），考虑空间 $L_p(\mu, X)$。

反证法 设 $L_p(\mu, X)$不具 NS，由引理 3.2.29(2)知，如果必要，除以一个常数，存在 $L_p(\mu, X)$ 中序列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$，使

(1) $1 = \operatorname{diam}(f_n)_{n=1}^{\infty} = \lim_n d(f_{n+1}, co(f_i)_{i=1}^{n})$。

(2) $0 < \Delta \Sigma_n^p(f_k) < \frac{1}{2^n}$。

由引理 3.2.25，只须找 $t_0 \in \Omega$，使

$$\lim_n \|f_n(t_0)-f_k(t_0)\|=M>0,\ \forall k$$

$$\lim_n \|f_{n+1}(t_0)-\overline{f_k(t_0)}\|=M, \forall k.$$

由引理 3.2.30，只要找 $t_0\in\Omega$，使

(a) $\lim_n \|f_n(t_0)-f_k(t_0)\|=M>0,\ \forall k$.

(b) $\lim_n \Delta\Sigma_n^p(f_k(t_0))=0$.

令

$$g_n(t)=\sum_{i=1}^n\|f_{n+1}(t)-f_i(t)\|^p-n\|f_{n+1}(t)-\overline{f_n(t)}\|^p,$$

由 $\|\cdot\|^p$ 的凸性知，$g_n(t)\geqslant 0$，由条件(2)，

$$\int_\Omega g_n(t)d\mu<\frac{1}{2^n},$$

由单调收敛定理，$\sum_{n=1}^\infty g_n$ 是可积的，从而

$$g_n(t)\xrightarrow{a.e}0.$$

即

$$\Delta\Sigma_n^p(f_k(t))\xrightarrow{a.e}0 \tag{3.9}$$

(注意，由引理 3.2.28 知，对 $(f_n(t))_{n=1}^\infty$ 的任何子列 $(f_{n_i}(t))_{i=1}^\infty$，也有

$$\Delta\Sigma_n^p(f_{n_i}(t))\xrightarrow{a.e}0).$$

对固定 $m>1$，

$$1=\lim_n d(f_n,co(f_i)_{i=1}^{n-1})\leqslant\lim_n\left\|f_n-\frac{1}{2}(f_m+f_1)\right\|$$
$$\leqslant\lim_n\left\|\frac{1}{2}(\|f_n(t)-f_m(t)\|+\|f_n(t)-f_1(t)\|)\right\|_{L_p(\mu)}$$
$$\leqslant 1.$$

故

$$\lim_n\left\|\frac{1}{2}(\|f_n(t)-f_m(t)\|+\|f_n(t)-f_1(t)\|)\right\|_{L_p(\mu)}=1.$$

由于 $L_p(\mu)$ 是一致凸的又由条件(1)知，

$$\lim_n\|(\|f_n(t)-f_m(t)\|-\|f_n(t)-f_1(t)\|)\|_{L_p(\mu)}=0.$$

使用对角线方法，我们得到 $(f_n(t))$ 的一个子列（仍记作 $(f_n(t))_{n=1}^{\infty}$），使 $f_1=0$，且对任意 $m>1$，

$$
\begin{aligned}
&\big|\|f_n(t)\| - \|f_n(t)-f_m(t)\|\big| \\
&= \big|\|f_n(t)-f_1(t)\| - \|f_n(t)-f_m(t)\|\big| \xrightarrow{\text{a.e}} 0. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

由于 $\|\,|f_n(t)|\,\|_{L_p(\mu)} \longrightarrow 1$，我们有 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 不按测度收敛于0，事实上，如果 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 按测度收敛于 0，选 ε，使

$$0<\varepsilon<(2^{\frac{1}{p}}-1)(2^{\frac{1}{p}}+2),$$

由于 $\|f_n\|\longrightarrow 1$，选自然数 $N_0>1$，使得当 $n\geqslant N_0$ 时，有

$$\|f_n\|>1-\frac{\varepsilon}{2},$$

由 Egoroff 定理，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列（仍记作 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$），使该子列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 几乎一致收敛于 0，由 (Ω,Σ,μ) 是非原子的，利用 $\|f_{N_0}(t)\|^p$ 的绝对连续性，可选 μ 可测子集 A，使 $\mu(\Omega\backslash A)>0$，

$$\|f_{N_0}\chi_{\Omega\backslash A}\|>\frac{\varepsilon}{2},\ \|f_{N_0}\chi_A\|>1-\varepsilon.$$

且 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 在 A 上一致收敛于 0，选取自然数 $i>N_0$，使

$$\|f_i\chi_A\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \|f_i\chi_{\Omega\backslash A}\|>1-\varepsilon.$$

令

$$g'=f_{N_0}\chi_A,\quad h'=f_i\chi_{\Omega\backslash A},$$

则由 ε 选法知，

$$
\begin{aligned}
1\geqslant\|f_{N_0}-f_i\| &\geqslant\|g'-h'\|-\|f_{N_0}-g'\|-\|h'-f_i\| \\
&\geqslant 2^{\frac{1}{p}}(1-\varepsilon)-\varepsilon-\varepsilon>1.
\end{aligned}
$$

矛盾，这表明 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 不测度收敛于 0。

由于 $\|f_n\|\leqslant 1$，$\forall n$，故存在 $\delta>0$，$\xi>0$ 及 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 的子列（仍记作 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$），使这个子列第一项 $f_1=0$，且 $\mu(E_n)>\xi>0$，其中

$$E_n=\left\{t\in\Omega;\ \frac{1}{\delta}\geqslant\|f_n(t)\|\geqslant\delta\right\}.$$

令 $E=\overline{\lim\limits_{n}}E_n$，则 $\mu(E)\geqslant\xi>0$。

由(3.10)式，选 $t_0\in E$，使

$$\left|\|f_n(t_0)\|-\|f_n(t_0)-f_m(t_0)\|\right|\longrightarrow 0, \forall m\in N. \qquad (3.11)$$

再选 $(f_n(t_0))_{n=1}^{\infty}$ 的子列（仍记为 $(f_n(t_0))_{n=1}^{\infty}$），使

$$\lim_{n}\|f_n(t_0)\|=M(\geqslant\delta),$$

从而，由(3.11)知，

$$\lim_{n}\|f_n(t_0)-f_m(t_0)\|=M>0, \forall m.$$

由(3.9)后注，知

$$\lim_{n}\Delta\Sigma_n^p(f_k(t_0))=0,$$

这样就得到一个子列 $(f_{n_i}(t))_{i=1}^{\infty}$ 及 $t_0\in\Omega$，满足(a)和(b)，这与 X 是NS矛盾. 证毕.

注　这个定理是由 M.A.Smith 和 B.Turret(S-T-2) 得到的，而上述形式是由本书作者简化的。

关于NS的一个 Open 问题是：若 $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ 是具 NS 的一列 Banach 空间，是否 $X=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\oplus X_i\right)_1$ 具 NS？（对于 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\oplus X_n\right)_1$ 情况，l_1 即为一个反例）。□

由定理 3.2.14 知，$L_p(\mu,X)$ 是 H 当且仅当 $L_p(\mu,X)$ 是 HR. M.A.Smith 和 B.Turret 问：是否 X 是 HR 空间且 X^* 具RNP，则 X 是 MLUR？(S-M-1)。

Kadec 证明了如下定理，对上述问题给以肯定的回答。

定理 3.2.32　若 X 是 HR 空间，且 $l_1\not\hookrightarrow X$，则 X 是 MLUR。

证明　设 $x\in S(X)$，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\|x\pm x_n\|\longrightarrow 1$，要证

$$x_n\longrightarrow 0.$$

反证法，若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 存在子列（仍记作 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$），使 $\|x_n\|\geqslant\delta>0$，$\forall n$。

由于 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有界的，且 $l_1\not\hookrightarrow X$，由 Rosenthal 的含 l_1 特

征定理(见定理6.2)，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列(仍记作$(x_n)_{n=1}^{\infty}$)是 wCauchy 的，我们说$(x_n)_{n=1}^{\infty}$不会范数收敛，事实上，否则，$x_n \longrightarrow y$，由于$\|x_n\| \geqslant \delta > 0$，故 $y \neq 0$，且

$$\lim_n \|x \pm y\| = \lim_n \|x \pm x_n\| = 1,$$

这与 X 是 R 矛盾。

选$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列(仍记作$(x_n)_{n=1}^{\infty}$)，使

$$\|x_{2n} - x_{2n+1}\| \geqslant \eta > 0, \forall n.$$

则

$$x_{2n} - x_{2n+1} \xrightarrow{w} 0,$$

故

$$x + \frac{x_{2n} - x_{2n+1}}{2} \xrightarrow{w} x,$$

由范数的 w 下半连续性，有

$$1 = \|x\| \leqslant \underline{\lim_n} \left\|x + \frac{1}{2}(x_{2n} - x_{2n+1})\right\|$$

$$\leqslant \overline{\lim_n} \left\|x + \frac{1}{2}(x_{2n} - x_{2n+1})\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \lim_n (\|x + x_{2n}\| + \|x - x_{2n+1}\|) = 1,$$

故

$$\lim_n \left\|x + \frac{1}{2}(x_{2n} - x_{2n+1})\right\| = 1,$$

由于 X 具 H 性质，故

$$x + \frac{1}{2}(x_{2n} - x_{2n+1}) \longrightarrow x,$$

因此，

$$0 < \eta \leqslant \lim_n \|x_{2n} - x_{2n+1}\| = 0,$$

矛盾。证毕。

注　由于 X^* 具 RNP $\Longrightarrow l_1 \not\hookrightarrow X$ (见定理 6.2)，故

Kadec 定理回答了上述问题，B.L.Lin 和 P.K.Lin(L-L-1) 推广了上述结果证明了下面的定理(定理 3.2.33)。□

为了进一步讨论，我们再引入几个定义。

定义 3.2.4 设 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，$x_0 \in A$ 称为 A 的可凹点（denting 点），如果对 $\forall \varepsilon > 0$，$x_0 \bar{\in} \overline{co}(A \backslash B(x_0,\varepsilon))$，其中 $B(x_0,\varepsilon)=\{y\in X; \|y-x_0\|<\varepsilon\}$。

定义 3.2.5 Banach 空间 X 称为 G 空间，如果 $S(X)$ 的每个点是 $U(X)$ 的可凹点。

定理 3.2.33 若 X 是 HR 空间，$l_1 \subset\!\!\!\!\not\to X$，则 X 是 G 空间。

证明 易见，若 X 的每个可分子空间是 G 空间，则 X 是 G 空间。故不妨设 X 是可分的。

反证法。若存在 $x_0 \in S(X)$，使 x_0 不是 $U(X)$ 的可凹点，从而存在 $\varepsilon > 0$，使 $x_0 \in \overline{co}(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon))$。下面分几步进行。

(1) 我们有 $x_0 \notin \overline{U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon)}^{w}$，事实上，若 $x_0 \in \overline{U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon)}^{w}$，则由 X 是可分的，$l_1 \subset\!\!\!\!\not\to X$，根据 Rosenthal 含 l_1 空间特征定理（见定理 6.2.25：若 X 是可分的，$l_1 \subset\!\!\!\!\not\to X$，则对 X 中每个有界集 A，若 $x \in \overline{A}^{w}$，那么存在 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$，使得 $x_n \xrightarrow{w} x$）知道，存在 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset U(X)$，$\|x_n - x_0\| \geq \varepsilon$，$\forall n$，使 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，由于范数的 w 下半连续性，

$$\lim_{n} \|x_n\| = \|x_0\| = 1,$$

再根据 X 具 H 性质，知 $x_n \longrightarrow x_0$，这与 $\|x_n - x_0\| \geq \varepsilon$ 矛盾。

(2) 由第(1)步知，$x_0 \notin \overline{U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon)}^{w}$，因此，存在 $\delta > 0$，$x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$，使

$$(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon)) \cap \{x \in X; x_k^*(x_0 - x) < \delta, 1 \leq k \leq n\} = \Phi$$

即

$$(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon)) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in X; x_k^*(x) < x_k^*(x_0) - \delta\},$$

令
$$M_k=\{x\in U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon);\ \ x_k^*(x)<x_k^*(x_0)-\delta\},$$
则
$$U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon)=\bigcup_{k=1}^{n}M_k.$$
从而
$$x_0\in\overline{co}(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon))=\overline{co}\Big(\bigcup_{k=1}^{n}M_k\Big).$$

但注意

$x_0\notin\{x\in X;x_k^*(x)\leqslant x_k^*(x_0)-\delta\}\supset\overline{co}(M_k)$, $k=,\cdots,n$.

(3) 我们说一定存在 $y^*,z^*\in X^*$ 及 $\eta>0$,使
$$x_0\in\overline{co}(M_{y*}(\eta)\cup M_{z*}(\eta)),$$
其中$M_{y*}(\eta)=(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon))\cap\{x\in X;\ y^*(x)<y^*(x_0)-\eta\}$,
$M_{z*}(\eta)=(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon))\cap\{x\in X;z^*(x)<z^*(x_0)-\eta\}$.

事实上,若 $x_0\in\overline{co}(M_1\cup M_2)$,则取 $y^*=x_1^*$, $z^*=x_2^*$,$\eta=\delta$ 即可,否则 $x_0\notin\overline{co}(M_1\cup M_2)$,则 $\exists\delta'>0$ 及 $y^*\in X^*$,使
$$y^*(M_1\cup M_2)<y^*(x_0)-\delta',$$
从而
$$M_1\cup M_2\subset M_y{}^*(\delta')\subset U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon),$$
从而
$$\overline{co}(U(X)\backslash B(x_0,\varepsilon))\subset\overline{co}(M_{y*}(\delta')\cup M_3\cup\cdots\cup M_n),$$
若
$$x_0\in\overline{co}(M_{y*}(\delta')\cup M_3),$$
则所要结论成立,否则继续上述过程直至有限步后,即得所要结论.

(4) 由第(3)步,$\exists x_n\in co(M_{y*}(\eta))$,$y_n\in co(M_{z*}(\eta))$使
$$\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)y_n\longrightarrow x_0,$$
由于
$$x_0\notin\overline{co}(M_{y*}(\eta))\cup\overline{co}(M_{z*}(\eta)),$$
故

$$0<\underline{\lim}\,\alpha_n\leqslant\overline{\lim}\,\alpha_n<1,$$

但 $x_n\in co(M_{y^*}(\eta))\subset\{x\in X;\ \ y^*(x)<y^*(x_0)-\eta\}$，故 $\|x_0-x_n\|>\eta$，同理 $\|y_n-x_0\|>\eta$，因此，$\|x_n-y_n\|\not\longrightarrow 0$（否则

$$\|x_n-\alpha_nx_n-(1-\alpha_n)y_n\|=(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|\longrightarrow 0,$$

知 $x_n\longrightarrow x_0$。矛盾！），这就得到 x_0不是 $U(X)$的强端点（见定义3.1.6 后注），但由 Kadec 定理（定理 3.2.32），x_0 是 $U(X)$的强端点，矛盾．证毕。

注　容易证明（例见定理 3.2.36）$G\Longrightarrow$MLUR，故定理3.2.33 推广了定理 3.2.32。□

定理 3.2.34　设 $1<p<+\infty$，X 是 G 空间，则 $L_p(\mu,X)$ 具H性质。

证明　令 $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset S(L_p(\mu,X))$，$f\in S(L_p(\mu,X))$，$f_n\xrightarrow{w}f$。

任取 $g\in L_p(\mu,X)^*$，使 $g(f)=1=\|g\|$，则

$$1\geqslant\frac{1}{2}\Big\|\,\|f_n(t)\|+\|f(t)\|\,\Big\|_{L_p(\mu)}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|f_n+f\|\geqslant\frac{1}{2}g(f_n+f)\longrightarrow 1,$$

故

$$\lim_n\ \frac{1}{2}\|\,\|f_n(t)\|+\|f(t)\|\,\|_{L_p(\mu)}=1,$$

由于 $L_p(\mu)$是一致凸的，故

$$\lim_n\ \|\,\|f_n(t)\|-\|f(t)\|\,\|_{L_p(\mu)}=0,$$

如果必要转到子序列，有

$$\|f_n(t)\|\xrightarrow{a.e}\|f(t)\|.$$

忽略零测集不计，扰动一下，可假设

$$\|f_n(t)\|=\|f(t)\|,\ \forall t\in\Omega,n.$$

对任正整数 k，令

$$E_{n,k}=\Big\{t;\ \|f(t)-f_n(t)\|\geqslant\frac{1}{k}\|f(t)\|\Big\},$$

则

$$\int_\Omega \|f(t)-f_n(t)\|^p d\mu$$

$$=\int_{E_{n,k}} \|f(t)-f_n(t)\|^p d\mu+\int_{\Omega\setminus E_{n,k}} \|f(t)-f_n(t)\|^p d\mu$$

$$\leqslant 2^p\int_{E_{n,k}} \|f(t)\|^p d\mu+\int_{\Omega\setminus E_{n,k}} \frac{1}{k^p}\|f(t)\|^p d\mu.$$

对任 $\varepsilon>0$，选k 充分大，使$\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2}$，则

$$\int_\Omega \|f(t)-f_n(t)^p\| d\mu\leqslant 2^p\int_{E_{n,k}} \|f(t)\|^p d\mu+\frac{1}{2^p}\varepsilon^p.$$

因此，为了证明 $f_n\longrightarrow f$，只须证对任何 $k\in N$，

$$\lim_n \int_{E_{n,k}} \|f(t)\|^p d\mu=0. \tag{3.12}$$

假设(3.12)不成立，则存在 $\delta>0$ 和 $k_0\in N$，使

$\int_{E_{n,k_0}} \|f(t)\|^p d\mu>\delta$，对无限多个 n 成立。

转到子列，可假设对任何 $n\in N$，

$$\int_{E_{n,k_0}} \|f(t)\|^p d\mu>\delta, \tag{3.13}$$

由于 $f_n\xrightarrow{w} f$，由 Mazur 定理，对每个 $m\in N$，存在$(a_i^m)_{i=1}^{N_m}$，使

$$a_i^m\geqslant 0,\sum_{i=1}^{N_m} a_i^m=1$$

且

$$\left\|\sum_{i=1}^{N_m} a_i^m f_i-f\right\|<\frac{1}{m}.$$

转到子列，可假设

$$\sum_{i=1}^{N_m} a_i^m f_i\xrightarrow{a.e} f.$$

令

$$\lambda(A)=\int_A \|f(t)\|^p d\mu,\forall A\in\Sigma,$$

则 λ 为(Ω,Σ,μ)上概率测度，由(3.13)式知 $\lambda(E_{n,k_0})>\delta$，$\forall n$。

对每个 m，令

$$S(m)=\left\{t\in\Omega;\sum_{i=1}^{N_m}a_i^m\chi_{E_{i,k_0}}(t)>\frac{\delta}{2}\right\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2}+\int_{S(m)}\sum_{i=1}^{N_m}a_i^m\chi_{E_{i,k_0}}(t)d\lambda(t)\\ \geqslant\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{M_m}a_i^m\chi_{E_{i,k_0}}(t)d\lambda(t)\\ =\sum_{i=1}^{N_m}a_i^m\lambda(E_{i,k_0})\geqslant\delta,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\lambda(S(m))&\geqslant\int_{S(m)}\sum_{i=1}^{N_m}a_i^m\chi_{E_{i,k_0}}(t)d\lambda(t)\\ &\geqslant\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

令

$$S=\overline{\lim_m}S(m)=\{t\in\Omega;t\in S(m),$$

对无限多个 m}，则

$$\lambda(S)\geqslant\overline{\lim_m}\lambda(S(m))\geqslant\frac{\delta}{2},$$

故 $S\neq\Phi$。

由于

$$\sum_{i=1}^{N_m}a_i^mf_i(t)\xrightarrow{a.e}f(t),$$

故存在 $t_0\in S$，使

$$\sum_{i=1}^{N_m}a_i^mf_i(t_0)\longrightarrow f(t_0).$$

令 $T=\{n;t_0\in E_{n,k_0}\}$，若 $t_0\in S(m)$，对某个 m，则

$$\sum_{\substack{i\in T\\ 1\leqslant i\leqslant N_m}}a_i^m>\frac{\delta}{2},\text{故 } T\neq\Phi,\text{且}$$

$$\sum_{i=1}^{N_m}a_i^mf_i(t_0)=\sum_{\substack{i\in T\\ 1\leqslant i\leqslant N_m}}a_i^mf_i(t_0)+\sum_{\substack{i\notin T\\ 1\leqslant i\leqslant N_m}}a_i^mf_i(t_0)$$

$$=\Big(\sum_{\substack{i\in T\\1\leqslant i\leqslant N_m}} a_i^m\Big)\cdot\sum_{\substack{i\in T\\1\leqslant i\leqslant N_m}}\frac{a_i^m}{\Big(\sum\limits_{\substack{i\in T\\1\leqslant i\leqslant N_m}} a_i^m\Big)} f_i(t_0)$$

$$+\Big(\sum_{\substack{i\notin T\\1\leqslant i\leqslant N_m}} a_i^m\Big)\sum_{\substack{i\notin T\\1\leqslant i\leqslant N_m}}\frac{a_i^m}{\Big(\sum\limits_{\substack{i\notin T\\1\leqslant i\leqslant N_m}} a_i^m\Big)} f_i(t_0).$$

由于当 $i\in T$ 时，

$$\|f_i(t_0)-f(t_0)\|\geqslant\frac{\|f(t_0)\|}{k_0},\quad \|f_i(t_0)\|=\|f(t_0)\|,$$

因 X 是 G 空间，故 $f(t_0)\notin\overline{co}(f_i(t_0); i\in T\}$，又由于 $t_0\in S(m)$，对无限多个 m，故对这些 m，有 $1\geqslant\alpha_m>\frac{\delta}{2}$，其中

$$\alpha_m=\sum_{\substack{i\in T\\1\leqslant i\leqslant N_m}} a_i^m,$$

令

$$x_m=\sum_{\substack{i\in T\\1\leqslant i\leqslant N_m}}\frac{a_i^m}{\alpha_m}f_i(t_0),\quad y_m=\sum_{\substack{i\notin T\\1\leqslant i\leqslant N_m}}\frac{a_i^m}{1-\alpha_m}f_i(t_0),$$

则 $\alpha_m x_m+(1-\alpha_m)y_m\longrightarrow f(t_0)$，我们自 $\alpha_m\not\longrightarrow 1$，事实上，否则 $\alpha_m\longrightarrow 1$，则 $x_m\longrightarrow f(t_0)$，但 $x_m\in co(f_i(T_0); i\in T)$ 这与

$$f(t_0)\notin\overline{co}(f_i(t_0); i\in T)$$

矛盾，故 $\alpha_m\not\longrightarrow 1$。

同时 $\|x_m-y_m\|\not\longrightarrow 0$，事实上，否则也有 $x_m\longrightarrow f(t_0)$，这也是不可能的。

如果必要转到子列，存在 $\eta>0$，使 $\|x_m-y_m\|>\eta>0$，$\forall m$。且

$$\frac{\delta}{2}<\varliminf_{n}\alpha_n\leqslant\varlimsup_{n}\alpha_n<1,$$

但 $\alpha_m x_m+(1-\alpha_m)y_m\longrightarrow f(t_0)$，这表明 $f(t_0)$ 不是强端点（或确切地说 $\frac{f(t_0)}{\|f(t_0)\|}$ 不是强端点），但 $f(t_0)$ 是可凹点(或确切地说 $\frac{f(t_0)}{\|f(t_0)\|}$ 是可凹点)，易见可凹点是强端点(例见定理3.2.36)。矛盾。证毕。

定理 3.2.35 若 $1<p<+\infty, l_1 \subset\!\!\!\!\!\!\not\;\, X$，则 TFAE：

(1) X 是 HR；

(2) X 是 G，

(3) $L_p(\mu, X)$ 是 HR；

(4) $L_p(\mu, X)$ 是 G。

证明　由于 X 是 G 空间，则 X 是 HR 空间(定理 3.2.36 和定理 3.2.38)，且若 $l_1 \subset\!\!\!\!\!\!\not\;\, X$，则 $l_1 \subset\!\!\!\!\!\!\not\;\, L_p(\mu, X)$ (Pi-1)。结合定理 3.2.33，定理 3.2.34 即得。证毕。

下面我们考虑所谓"点态"问题，即何时 $f \in S(L_p(\mu, X))$ 是端点、光滑点、暴露点等问题。为此，我们引入一些定义，弄清各种点之间关系。

定义 3.2.6 设 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集。

(1) $x_0 \in A$ 称为 A 的暴露点，如果 $\exists x^* \in X^*$，使

$$x^*(x_0) > x^*(A \backslash \{x_0\})。$$

(2) $x_0 \in A$ 称为 A 的强暴露点，如果 $\exists x^* \in X^*$，使

$$x^*(x_0) > x^*(A \backslash \{x_0\}),$$

(即 x_0 为 A 的暴露点)，且任 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$，$x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x_0)$，则 $x_n \longrightarrow x_0$。

(3) $x_0 \in A$ 称为 A 的端点，如果 $y, z \in A$，$x_0 = \frac{y+z}{2}$，则 $y = z = x_0$，记为 $x_0 \in \text{ext}A$ ($\text{ext}A$ 表示 A 的全体端点)。

(4) $x_0 \in A$ 称为 A 的 w^* 端点，如果 $x_0 \in (\text{ext}\,\overline{A}^{w^*}) \cap A$，其中 $\overline{A}^{w^*}$ 表示 A 看作 X^{**} 中集合 w^* 闭包(严格地说，$Jx_0 \in (\text{ext}\overline{JA}^{w^*}) \cap JA$，其中 $J: X \longrightarrow X^{**}$ 是典型嵌入映象)。

(5) $x_0 \in A$ 称为 A 的强端点，如果对任 $\varepsilon>0, \exists \beta>0$，使得当

$$y, z \in A, \left\| x - \frac{1}{2}(y+z) \right\| < \beta$$

时，有 $\|y-z\|<\varepsilon$，或等价地，若

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A, \left\| x - \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| \longrightarrow 0,$$

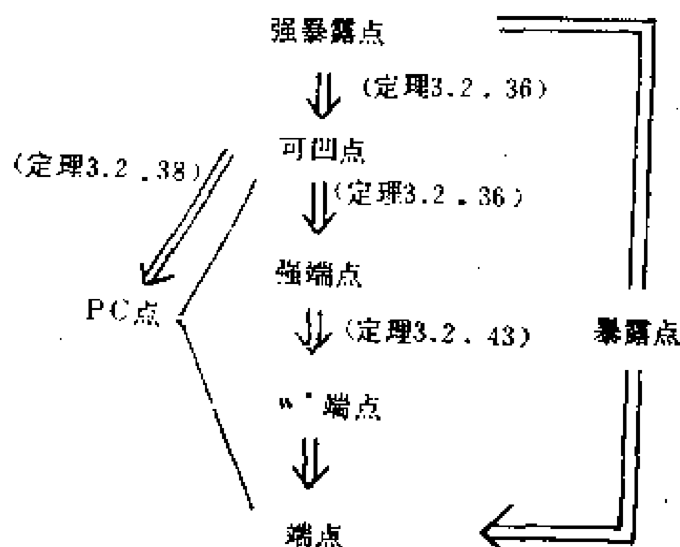
则 $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$。

我们在定义 3.2.4 中给出可凹点的定义，$x_0 \in A$ 称为 A 的可凹点，如果对任 $\varepsilon > 0$，$x \notin \overline{co}(A \backslash B(x_0, \varepsilon))$，其中

$$B(x_0, \varepsilon) = \{y \in X, \|y - x_0\| < \varepsilon\}.$$

在定义 3.1.22 中已给出 A 的 PC 点定义：若 $I:(A, w) \longrightarrow (A, \|\cdot\|)$ 在 $x_0 \in A$ 点连续，则 x_0 叫 A 的 PC 点。

设 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，则有下列关系：



(*)见定理 3.2.44。

定理 3.2.36 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，则

(1) 若 x_0 是 A 的强暴露点，则 x_0 是 A 的可凹点；

(2) 若 x_0 是 A 的可凹点，则 x_0 是 A 的强端点。

证明 (1) 由于 x_0 是 A 的强暴露点，故 $\exists x_0^* \in S(X)^*$，使 $x_0^*(x_0) > x_0^*(A \backslash \{x_0\})$，且当 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$，$x_0^*(x_n) \longrightarrow x_0^*(x_0)$ 时，有 $x_n \longrightarrow x_0$。

对任 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $y \in A \backslash B(x_0, \varepsilon)$ 时，有

$$x_0^*(x_0) > x^*(y) + \delta, \text{故}$$

$$x_0^*(x_0) - \delta \geqslant \sup\{x_0^*(y); y \in A \backslash B(x_0, \varepsilon)\}$$
$$= \sup\{x_0^*(y); y \in \overline{co}(A \backslash B(x_0, \varepsilon)\},$$

故 $x_0 \notin \overline{co}(A \backslash B(x_0, \varepsilon))$，即 x_0 是 A 的可凹点。证毕。

(2) 设 x_0 不是 A 的强端点，则

$$\exists\varepsilon>0,\ \exists(y_n)_{n=1}^{\infty},\ (x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A,\ u_n,\ z_n\in\frac{1}{n}U(X),$$

使

$$x_0=\frac{1}{2}((x_n+z_n)+(y_n+u_n)\|(x_n+z_n)-(y_n+u_n)\|\geqslant\varepsilon,$$

故

$$\lim_n \frac{1}{2}(x_n+y_n)=x_0,$$

且当 n 充分大时，

$$\|x_0-x_n\|>\frac{\varepsilon}{4},\qquad \|x_0-y_n\|>\frac{\varepsilon}{4}.$$

即

$$x_n,y_n\in A\backslash B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

故

$$x_0\in\overline{co}\left(A\backslash B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{4}\right)\right),$$

因此，x_0 不是可凹点。证毕。

定义 3.2.7 设 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，$\alpha>0$，$x^*\in X^*$，

$$S(x^*,\alpha,A,)\equiv\{y\in A;x^*(y)\geqslant\sup x^*(A)-\alpha\}$$

称为 A 的一个切片。

$$S^0(x^*,\alpha,A)\equiv\{y\in A;x^*(y)>\sup x^*(A)-\alpha\}$$

称为 A 的一个开切片。

定理 3.2.37 x_0 是有界闭凸集 A 的可凹点，当且仅当对任 $\varepsilon>0$，$\exists A$ 的一个切片 $S^0(x^*,\alpha,A)$，使 $x_0\in S^0(x^*,\alpha,A)$，且

$$\operatorname{diam}S^0(x^*,\alpha,A)<\varepsilon.$$

证明 “$\Longleftarrow$”任取 $\varepsilon>0$，由假设，存在A的切片 $S^0(x^*,\alpha,A)$ 使 $x_0\in S^0(x^*,\alpha,A)$，$\operatorname{diam}S^0(x^*,\alpha,A)<\varepsilon$，若 $y\in A\backslash B(x_0,\varepsilon)$，则由 $\operatorname{diam}S^0(x^*,\alpha,A)<\varepsilon$ 知，$y\notin S^0(x^*,\alpha,A)$，故

$$A\backslash B(x_0,\varepsilon)\subset\{x\in A; x^*(x)<\sup x^*(A)-\alpha\},$$

从而

$$\overline{co}(A\backslash B(x_0,\varepsilon))\subset\{x\in A, x^*(x)\leqslant\sup x^*(A)-\alpha\}.$$

故 $x_0\notin\overline{co}(A\backslash B(x_0,\varepsilon))$，即 x_0 是 A 的可凹点。

"$\Longleftarrow$" 若 x_0 是 A 的可凹点，故任给

$$\varepsilon>0, x_0\notin\overline{co}\left(A\backslash B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

由分离定理，存在 $x^*\in S(X^*)$，$\alpha>0$，使

$$x^*(x_0)>x^*(x_0)-\alpha>\sup x^*\ \overline{co}\left(A\backslash B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

令 $\alpha_1=\sup x^*(A)-x^*(x_0)+\alpha$，则 $\alpha_1\geqslant\alpha$，

$$x^*(x_0)=\sup x^*(A)+\alpha-\alpha_1>\sup x^*(A)-\alpha_1$$

故 $x_0\in S^0(x^*,\alpha_1,A)$，且容易看到

$$S^0(x^*,\alpha_1,A)\subset\overline{B}\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

从而 $\operatorname{diam}S^0(x^*,\alpha_1,A)\leqslant\varepsilon$。证毕。

定理 3.2.38 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，若 x_0 是 A 的可凹点，则 x_0 是 A 的 PC 点。

证明 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$，$x_n\xrightarrow{w}x_0$，由于 x_0 是 A 的可凹点，根据定理 3.2.37，对任意 $\varepsilon>0$，$\exists A$ 的开切片 $S^0(x^*,d,A)$，使

$$x_0\in S^0(x^*,\alpha,A),\ \operatorname{diam}S^0(x^*,\alpha,A)<\varepsilon.$$

因为 $x_n\xrightarrow{w}x_0$ 故当 n 充分大时，$x_n\in S^0(x^*,\alpha,A)$，因此，当 n 充分大时，$\|x_n-x_0\|<\varepsilon$，即 $x_n\longrightarrow x_0$，从而 x_0 是 A 的 PC 点。证毕。

引理 3.2.39 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，则 x_0 是 A 的 PC 点 $\Longleftrightarrow\exists(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\subset X^*$，使任 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$，若

$$\lim_n x_i^*(x_n)=x_i^*(x_0),\ \forall i,$$

则 $x_n\longrightarrow x_0$。

证明 "$\Longrightarrow$" 对任 n，$\exists x_{1,n}^*,\cdots,x_{m(n),n}^*,\delta_n$，使

$$\{y\in A; |x_{i,n}^*(y-x_0)|<\delta_n, 1\leqslant i\leqslant m(n)\}$$

$$\subset\left\{y\in A;\|y-x_0\|<\frac{1}{n}\right\},$$

将 $x_{11}^*,\cdots,x_{n(1),1}^*,x_{12}^*,\cdots,x_{m(2),2}^*,\cdots$ 排列起来，记为 $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$，若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$，使 $\lim\limits_n x_i^*(x_n)=x_i^*(x_0),\forall i$，则对任 n_0，选 n_1，当 $k>n_1$ 时，有

$$|x_{i,n_0}^*(x_k-x_0)|<\delta_{n_0},1\leqslant i\in m(n_0),$$

故 $\|x_k-x\|\leqslant\frac{1}{n_0}$，当 $k>n_1$ 时，从而 $x_k\longrightarrow x_0$。证毕。

"$\Longleftarrow$" 对任 n，存在有限子集 $D_n\subset S(X^*)$，$\delta_n>0$，使

$$\{y\in A;|x^*(y-x_0)|<\delta_n,x^*\in D_n\}\subset B\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap A_{\circ}\quad(3.14)$$

事实上，否则 $\exists n_0$，对 $S(X^*)$ 的任何有限子集 D_n 及任 $\delta>0$，有

$$\{y\in A;|x^*(y-x_0)|<\delta,x^*\in D_n\}\not\subset B\left(x_0,\frac{1}{n_0}\right)\cap A,$$

特别地，

$$A_1=\{y\in A;\ |x_1^*(y-x_0)|<1\}\not\subset B\left(x_0,\frac{1}{n_0}\right)\cap A,$$

$$A_2=\left\{y\in A;|x_i^*(y-x_0)|<\frac{1}{2},i=1,2\right\}\not\subset B\left(x_0,\frac{1}{n_0}\right)\cap A,$$

$\vdots$

$$A_n=\left\{y\in A;|x_i^*(y-x_0)|<\frac{1}{n},1\leqslant i\leqslant n\right\}\not\subset B\left(x_0,\frac{1}{n_0}\right)\cap A,$$

$\vdots$

选 $y_n\in A_n\backslash B\left(x_0,\frac{1}{n_0}\right)$，则有 $\lim\limits_n x_i^*(y_n)=x_i^*(x_0),\forall i$，但

$$\|y_n-x_0\|\geqslant\frac{1}{n_0},$$

与假设矛盾。故(3.14)成立。

由(3.14)立即知 x_0 是 A 的 PC 点，证毕。

定理 3.2.40 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，x_0 是

A 的 PC 点，且 x_0 还是 A 的端点，则 x_0 是 A 的强端点。

证明　因为 x_0 是 A 的 PC 点，根据引理 3.2.39 知，存在 $(x_i^*)_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，使得当 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$，$\lim\limits_n x_i^*(x_n)=x_i^*(x_0)$，$\forall i$，则 $x_n\longrightarrow x_0$。

若

$$(y_n)_{n=1}^{\infty},\ (z_n)_{n=1}^{\infty}\subset A,\text{则}\lim_n \frac{1}{2}(y_n+z_n)=x_0,$$

首先，我们注意，若 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使得 $y_{n_i}\longrightarrow y_0$，则

$$z_{n_i}\longrightarrow 2x_0-y_0\equiv z_0\in A,$$

故

$$\frac{y_0+z_0}{2}=x_0,$$

由 x_0 是 A 的端点，故 $x_0=y_0=z_0$，故 $\|y_{n_i}-z_{n_i}\|\longrightarrow 0$。现在证明 $y_n\longrightarrow x_0$，从而 $z_n\longrightarrow x_0$，故 $\|y_n-z_n\|\longrightarrow 0$。反证法，若 $y_n\not\longrightarrow x_0$，则 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $(y_{n_i})_{n=1}^{\infty}$ 使 $\|y_{n_i}-x_0\|>\varepsilon,\forall i$。由前面证明知道，$(y_{n_i})_{n=1}^{\infty}$ 没有子列收敛，故可选子列（仍记作 (y_{n_i})），使

$$\|y_{n_j}-y_{n_k}\|>\delta>0,\ j\neq k.$$

用对角线法，可选 $(y_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ 的子列，仍记作 $(y_{n_j})_{j=1}^{\infty}$，使

$$\lim_{j\to\infty} x_i^*(y_{n_j})=a_i,\quad \lim_j x_i^*(z_{n_j})=b_i,\forall i,$$

则

$$\lim_j x_i^*\left(\frac{y_{n_j}+z_{n_j}}{2}\right)=x_i^*(x_0)=\frac{1}{2}(a_i+b_i)$$

$$\lim_j x_i^*\left(\frac{y_{n_{j+1}}+z_{n_j}}{2}\right)=x_i^*(x_0)=\frac{1}{2}(a_i+b_i),$$

因此，有

$$\frac{1}{2}(y_{n_j}+z_{n_j})\longrightarrow x_0,\quad \frac{1}{2}(y_{n_{j+1}}+z_{n_j})\longrightarrow x_0,$$

从而

$$y_{n_j}-y_{n_{j+1}}\longrightarrow 0,$$

矛盾！证毕。

下面这个定理是十分重要且有用的。

定理 3.2.41 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，则 x_0 是 A 的 w^* 端点，当且仅当 x_0 的关于 A 的相对开 w 邻域 V 含有 A 的一个开切片 $S^0(x^*,\alpha,A)$，使 $x_0\in S^0(x^*,\alpha,A)$。

证明 “$\Longrightarrow$” 若 $V=\{y\in A;|x_i^*(x_0-y)|<\varepsilon, x_i^*\in X^*, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 x_0 关于 A 的相对 w 开邻域。

令 $E_i=\{y\in A;x_i^*(x_0-y)\geqslant\varepsilon\}$，$F_i=\{y\in A;x_i^*(x_0-y)\leqslant-\varepsilon\}$ $i=1,\cdots,n$，则 $\overline{E}_i^*$，$\overline{F}_i^*$ 是 w^* 紧凸集（$\overline{E}^*$ 表示 E 在 X^{**} 中 w^* 闭包），故 $co\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\overline{E}_i^*\cup\overline{F}_i^*)\right)$ 是 w^* 紧凸集（注意局部凸线性拓扑空间中紧凸集的有限并的凸包是紧凸集），且 $x_0\notin\overline{E}_i^*\cup\overline{F}_i^*$，$1\leqslant i\leqslant n$。由于 $x_0\in\mathrm{ext}\,\overline{A}^*$，故 $x\notin co\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\overline{E}_i^*\cap\overline{F}_i^*)\right)$，由分离定理，存在 $x^*\in S(X^*)$，使

$$x^*(x_0)>\alpha>\sup x^*\left(co\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{E}_i^*\cup\overline{F}_i^*\right)\right).$$

若 $y\in A\backslash V$，则 $y\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E_i\cup F_i)$，故 $x^*(y)<\alpha$，即

$$y\notin S(x^*,\ \sup x^*(A)-\alpha,A),$$

从而 $S(x^*,\ \sup x^*(A)-\alpha,A)\subset V$，即 $x_0\in S(x^*,\sup x^*(A)-\alpha,A)\subset V$。证毕。

“$\Longleftarrow$” 若 $x_0=\dfrac{1}{2}(x^{**}+y^{**})$，其中 $x^{**},y^{**}\in\overline{A}^*$，$x_0\neq x^{**}$，则 $\exists x_0^*\in S(X^*)$，使 $|x_0^*(x_0-x^{**})|>\delta>0$，对某个 δ。

任取 x_0 在 $\overline{A}^*$ 中相对 w^* 开邻域，

$V=\{z^{**}\in\overline{A}^*;|x_i^*(x_0)-z^{**}(x_i^*)|<\varepsilon, i=1,\cdots,m\}$，

则

$$V_1=\{z\in A;|x_i^*(x_0-z)|<\varepsilon,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\cap\{z\in A;|x_0^*(x_0-z)|<\frac{\delta}{2}\}$$

是 x_0 关于 A 的相对 w 开邻域，由假设存在 $S(y^*,\alpha,A)$，使

$$x_0\in S(y^*,\alpha,A)\subset V_1,$$

由于

$$\sup y^*(A)=\sup y^*(\overline{A}^*)$$

（将 y^* 看作 X^{***} 的元），故

$$x_0\in S(y^*,\alpha,\overline{A}^*)\subset V\cap\Big\{z^{**}\in\overline{A}^*;\ |x_0^*(x_0)-z^{**}(x_0^*)|<\frac{\delta}{2}\Big\},$$

因

$$x_0=\frac{1}{2}(y^{**}+x^{**}),$$

且 $x^{**}\notin S(y^*,\alpha,\overline{A}^*)$，故

$$y^{**}\in S(y^*,\alpha,\overline{A}^*)\subset V,$$

由 V 的任意性，知 $x_0=y^{**}$，矛盾，故 x_0 是 A 的 w^* 端点。证毕。

定理 3.2.42 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，若 x_0 是 A 的 w^* 端点且 x_0 也是 A 的 PC 点，则 x_0 是 A 的可凹点。

证明 由于 x_0 是 A 的 PC 点，故对任 $\varepsilon>0$，$\exists x_0$ 的关于 A 的相对 w 开邻域 V，使 $\operatorname{diam}V<\varepsilon$，又由于 x_0 是 A 的 w^* 端点，根据定理 3.2.41，$\exists A$ 的开切片 $S^0(x^*,\alpha,A)$ 使 $x_0\in S^0(x^*,\alpha,A)\subset V$，从而 $\operatorname{diam}S^0(x^*,\alpha,A)<\varepsilon$，由定理 3.2.37 知，$x_0$ 是 A 的可凹点。证毕。

定理 3.2.43 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集，x_0 是 A 的强端点，则 x_0 是 A 的 w^* 端点。

证明 若 x_0 不是 A 的 w^* 端点，则存在 $x^{**},y^{**}\in\overline{A}^*$，使 $y^{**}\neq x^{**}$，且 $x_0=\frac{1}{2}(x^{**}+y^{**})$。

选 $x^*\in X^{**}$，使 $(x^{**}-y^{**})(x^*)=1$，取 $(x_\delta),(y_\delta)\subset A$，使 $x_\delta\xrightarrow{w^*}x^{**}$，$y_\delta\xrightarrow{w^*}y^{**}$，则当 δ 充分大时，有 $x^*(x_\delta-y_\delta)>\frac{1}{2}$。但

$$\frac{1}{2}(x_\delta+y_\delta)\xrightarrow{w^*}\frac{1}{2}(x^{**}+y^{**})=x_0.$$

故

$$\frac{1}{2}(x_\delta+y_\delta)\xrightarrow{w}x_0,$$

因此存在

$$\alpha_i\geq 0,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,(x_{\delta_i})_{i=1}^{n},\ (y_{\delta_i})_{i=1}^{n},$$

使

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\frac{1}{2}(x_{\delta_i}+y_{\delta_i})-x\right\|<\eta,$$

其中 η 是 x_0 为 A 的强端点定义中相应于 $\frac{1}{4\|x^*\|}$ 的 η(即当

$$y,z\in A,\left\|\frac{1}{2}(y+z)-x_0\right\|<\eta$$

时,有 $\|y-z\|<\frac{1}{4\|x^*\|}$),则

$$\frac{1}{4\|x^*\|}>\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{\delta_i}-\alpha\sum_{i=1}^{n}{}_i y_{\delta_i}\right\|$$

$$>\frac{1}{\|x^*\|}\left|x^*\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_{\delta_i}-y_{\delta_i}\right)\right|>\frac{1}{2\|x^*\|}.$$

矛盾!从而 x_0 是 A 的 w^* 端点. 证毕.

定理 3.2.44 若 A 是 Banach 空间 X 的有界闭凸集,x_0 是 A 的端点,且 x_0 是 A 的 PC 点,则 x_0 是 A 的可凹点.

证明 由定理 3.2.40 知,x_0 为 A 的强端点,再根据定理 3.2.43 知 x_0 为 A 的 w^* 端点.应用定理 3.2.42 知,x_0 为 A 的可凹点,证毕.

下面我们叙述一些"点态"结论.关于证明见相应的参考文献.

(Ⅰ)端点

(1) $f\in L_p(\mu,X)$, $\|f\|=1$, $\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a.e是 $U(X)$的端点,则

f 是 $U(L_p(\mu,X))$ 的端点(定理 3.2.1)。

(2) (a) Greim (Gr-1) 给出反例表明，当 X 不可分时，存在 $f\in S(L_p(m,X))$ 使 f 是 $U(L_p(m,X))$ 的端点，但是 $\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ 不是 a.e 为 $U(X)$ 的端点，其中 m 为 $[0,1]$ 上 Borel 集的 σ 代数上的 Lebesgue 测度。

(b) 若 X 是可分的共轭空间，Ω 为局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 Ω 上正则 Borel 测度，则 f 是 $L_p(\mu,X)$ 的单位球的端点 $\Longrightarrow$ $\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a.e 是 $U(X)$ 的端点(Sa-1)。

(c) 若 X 是可分 Banach 空间，Ω 是完备可分度量空间，μ 是 Ω 上 Borel 测度，则 f 是 $L_p(\mu,X)$ 的单位球的端点 $\Longrightarrow \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a.e 是 $U(X)$ 的端点(J-1)。

(Ⅱ) 强暴露点

(1) 若 X 是光滑的 Banach 空间，$f\in L_p(\mu,X)$，$\|f\|=1$，$\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a.e 是 $U(X)$ 的强暴露点，则 f 是 $U(L_p(\mu,X))$ 的强暴露点(Gr-2)。

(2) 若 $f\in S(L_p(\mu,X))$，$g\in S(L_p(\mu,X)^*)$，则

g 强暴露 $f \Longleftrightarrow \|g(t)\|$ 强暴露 $\|f(t)\|$，且 $g(t)$ 强暴露 $f(t)$，或 $g(t)=f(t)=0$ (Gr-2)。

(3) f 是 $U(L_p(\mu,X))$ 的强暴露点 $\Longrightarrow \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a.e 是 $U(X)$ 的强暴露点(Gr-3)。

(Ⅲ) 强端点

(1) $f\in S(L_p(\mu,X))$，$\frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a.e 是 $U(X)$ 强端点 $\Longrightarrow f$ 是 $U(L_p(\mu,X))$ 强端点(定理 3.2.7)。

(2) $f\in S(L_p(\mu,X))$，f 是 $U(L_p(\mu,X))$ 的强端点 $\Longrightarrow \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$

a·e 是 $U(X)$ 强端点。(Sm-1),(Gr-2)。

(Ⅳ) LUC 点

f 是 $U(L_p(\mu,X))$ 的 LUC 点 $\Longleftrightarrow \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a·e 是 $U(X)$ 的 LUC 点(定理 3.2.5)(Gr-3)。

(Ⅴ) 可凹点

f 是 $U(L_p(\mu,X))$ 的可凹点 $\Longleftrightarrow \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ a·e 是 $U(X)$ 的可凹点(L-L-2)。

注 M.A.Smith (Sm-1) 引入两类空间。□

定义 3.2.8 Banach 空间 X 称为 URWC, 如果对任意

$$z\in X,(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X),\|x_n+y_n\|\longrightarrow 2,$$

且 $x_n-y_n\xrightarrow{w}z$, 则 $z=0$。

定义 3.2.9 Banach 空间 X 称为 LURWC, 若对任 x, $z\in X,(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X),\|x\|=1,\|x_n+x\|\longrightarrow 2, x_n\xrightarrow{w}z$, 则 $z=x$。

下列两个问题仍是Open的:

(1) X 是 URWC $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $L_p(\mu,X)$ 是 URWC,

(2) X 是 LURWC $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $L_p(\mu,X)$ 是 LURWC。

第三章 参考文献

(A-1) K.T.Andrews Dunford-Pettis sets in the space of Bochner integrable functions.
Math. Ann. 241(1974)35~41.

(B-1) Jong Sook Bae Reflexivity of a Banach space with uniformly normal structure.
Proc,A.M.S.(1984).269~270.

(C-M-1) E.Casini & E.Maluta Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings in spaces with uniformly

normal structure.
Nonlinear Ana. Theory. Math. & Appl. vol.9 no.1 (1985)103～108.
(E-V-1) G.Emmanuele & A.Villani Lifting of rotundity properties from E to $L_p(\mu,E)$. to appear.
(Ga-1) A.L.Garkavi The best prossible net and the best prossible cross-section of a set in a normed space.
Izv.Akad.Nauk.SSSR ser.Math.26(1962)187～207.
(Gr-1) P.Greim An extremel vector valued L^p function taking no extremal vectors as values.
Proe.A.M.S.84(1982)65～68.
(Gr-2) P. Greim Strongly exposed points in Bochner L^p spaces.
Proc.A.M.S. 88(1983)81～84.
(Gr-3) P.Greim A note on strong extreme and strongly exposed point in Bochner L^p space.to appear in Proc. A.M.S.
(J-1) J.A.Johnson Extreme measurable selections Proc. A.M.S. 44(1974)107～112.
(Kr-1) W.A.Kirk A fixed point theorem for mapping which do not increase distance Amer. Math. Monthly 72(1965)1004～1006.
(Kw-1) S.Kwapien Sur les espaces de Banach contenant c_0.
Studia Math.52.(1974)187～188.
(L-L-1) B.L. Lin & P. K. Lin Property H in Lebesgue-Bochner function spaces. Proc.A.M.S.(1988)
(L-L-2) B.L.Lin & P.K.Lin Characterizations of denting points. to appear in Proc.A.M.S.

(L-Y-1) B.L.Lin & Xin tai Yu On the k-uniform rotund and the fully convex Banach spaces. J. Math. Anal. Appl.110.(1985)407~410.

(L-1) P.K.Lin Fully 2-convexity in Bochner L^p spaces. (Printed).

(L-S-1) I. E. Leonard & K. Sundaresan. Geometry of Lebesgue-Bochner function spaces-Smoothness. Bull. A.M.S. Vol.79.no.3(1973)546—549.

(M-1) E.Maluta Uniformly normal structure and related coefficients
Pacific.J.Math. Vol.lll,no.2, (1984)357~369

(N-1) R.D.Neidinger Schachermayer's result concerning RNP and KMP equivalence Loghorn,Notes.The Univ. Texas 1983~1984.p.111~125.

(P-1) G.Pisier Une propiete de stabilite de la classe des espaces ne contenant pas l_1. C.R.Acad.Sci. Paris. Ser A.286(1978)747~749.

(R-1) H.P .Rosenthal w^* Polish Banach spaces.
J.Fun.Anal.Vol.76 No.2(1988)267~316.

(Sw-1) S.Swaminathan Fixed point theory and its applications.
Acadlmic press New York,San Francisco,London 1976. p.60.

(Sm-1) M.A.Smith Rotundity and Extremity in $l^p(X_i)$ and $L^p(\mu,X)$.
Contemprary Math.A.M.S.1986.

(S-T-1) M.A.Smith & B.Turret Rotundity in Lebesgue Bochner function spaces.
Trans.A.M.S.257(1980)105~118.

(S-T-2) M.A.Smith & B.Turret Normal structure in Bochner L^p spaces (printed).

(Sa-1) K. Sandereson Extreme points of the unit cell in Lebesgue-Bochner function spaces.
Colloq.Math. 22(1970)111～119.

(Sc-1) W.A.Schachermayer The Banach Saks property is not L^2 hededitary.
Israel.J.Math.Vol.40.no.3(1981)340～341.

(Sc-2) W.Schachermayer For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodym property and the Krein-Milman property are equivalent. Studia Math. Tom.LXXXI(1985)330～339

(T-1) M.Talagrand Weak Cauchy sequences in $L^1(E)$.
A.J.Math.106(1984)703～724.

(俞-1)俞鑫泰 KUR 空间是 NUC 空间.
科学通报 1983 no.24.1473～1475.

(俞-臧-1)俞鑫泰和臧军 关于P凸Banach 空间.
数学年刊(1987)8(A).no.1.88～93.

第四章 Dvoretsky 定理

§1 引 言

众所周知，如果$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset R^1$（实数集），则

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n \text{ 无条件收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}x_n \text{ 绝对收敛.}$$

今在（实）Banach 空间 X 中考虑上述问题。因 X 上至少有两种常用拓扑（即范数拓扑和 w 拓扑），如果在共轭空间 X^* 还可考虑 w^* 拓扑。故可考虑级数的各种收敛及它们相互关系。我们引入如下定义。

定义 4.1.1 设 X 是（实）Banach 空间，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$。

如果$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty$（即收敛），则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$绝对收敛。

如果$\|\cdot\|-\lim\limits_{k}\sum_{i=1}^{k}x_i$存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，记$\sum_{n=1}^{\infty}x_n<+\infty$（为了明确起见，写出$\|\cdot\|-\lim\limits_{k}$表示范数拓扑极限）。

如果$w-\lim\limits_{k}\sum_{i=1}^{k}x_i$存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ w 收敛，记为$w-\sum_{n=1}^{\infty}x_n<+\infty$（其中 $w-\lim\limits_{k}$ 表示 w 拓扑的极限）。

如果对自然数集的任何置换 π，$\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}<+\infty$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$无条件收敛（uc）。

如果对自然数集的任何置换 π，$w-\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}<+\infty$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ w 无条件收敛（wuc）。

如果对任何增加正整数序列 $(n_i)_{i=1}^{\infty}$，$w-\sum_{i=1}^{\infty}x_{n_i}<+\infty$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ w 子级数收敛。

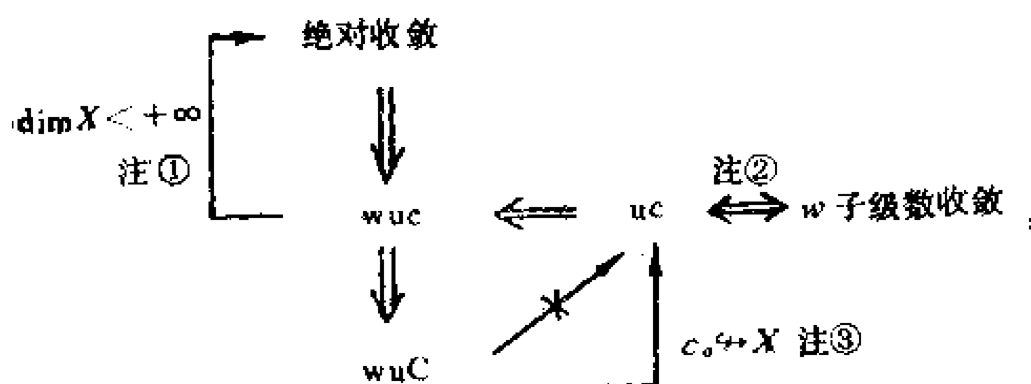
如果对自然数集的任何置换 π，$\left(\sum_{n=1}^{k}x_{\pi(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中 w Cauchy 列，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 为 w 无条件 Cauchy(wuC)。

注　若 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，则我们也可引入相应的 w^* 无条件收敛(w*uc)级数，w^* 无条件 Cauchy(w*uC)级数概念。□

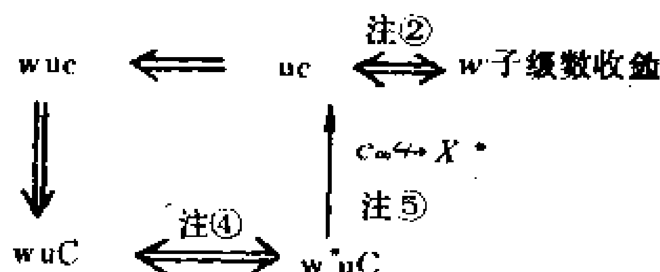
在 c_0 中，令 $x_n=\frac{1}{n}e_n$，其中 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 c_0 的自然基，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛$\left(且\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e_n\right)$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 不是绝对收敛。于是人们就问：是否对每个无限维 Banach 空间 X，均存在 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛但不绝对收敛？一直到 1950 年 A.Dvoretsky & C.A.Rogers (D-R-1) 才肯定地回答了这个问题。但他们的证明十分难懂。许多数学家，包括 Dvoretsky 本人，相继进行深入地讨论，给出不同的证明和进一步的结果。1956 年 Grothendieck 在考虑可完备度量化的局部凸线性拓扑空间(即Frechet空间)分类问题时，引入了 1 可和算子(也叫绝对可和算子)及 2 可和算子，用简单方法给出 Dvoretsky & Rogers 定理的证明。但许多数学家从 Banach 空间中均衡凸体(含内点的均衡凸集)的几何性质考虑，得到一系列重要的、令人感兴趣的结果，而将 Dvoretsky-Rogers 定理作为一个推论得到，这些研究近期更深入地发展成一个专题："Banach 空间中局部化理论"(见(M-S-1))。

首先，我们先将级数的各种收敛性的关系列表：

在 X 中 级 数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$



在 X^* 中级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*$：



注① 这就是 Dvoretsky-Rogers 定理：令 X 是无限维 Banach 空间，$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$是正数序列，使$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<+\infty$，则在 X 中存在序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，使$\|x_n\|=\lambda_n$，$\forall n$，且$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛。□

推论 Banach 空间 X 是有限维的充要条件是 X 中每个无条件收敛级数是绝对收敛的。

关于 D-R 定理的证明及深入结果见 §2、§3。

注② 这就是 Orlicz-Pettis 定理：设 X 是 Banach 空间，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ w子级数收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛（证明见 §2）。□

注③ 这就是Bessaga-Pelezynski定理：$c_0 \not\hookrightarrow X$当且仅当：若$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是 wuC，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是 uc（定理4.2.14）。□

注④　证明见第六章定理注 6.3.39。□

注⑤　由注④知，$wuC \Longleftrightarrow w^*uC$，故由注②，

$$c_0 \subset_{\to} X^* \Longleftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \text{ 是 } w^*uC \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \text{ 是 } uc\right).$$

关于 $c_0 \subset_{\to} X^* \Longleftrightarrow l_\infty \subset_{\to} X^*$（证明见定理 6.1.27）。□

§2　Dvoretsky-Rogers 定理的证明

(1) Dvoretsky-Rogers 定理的第一种证明方法。

D-R 定理可由下面称为较弱形式的 Dvoretsky 定理得出。

定理 4.2.1（较弱形式的 Dvoretsky 定理）　令$(X, \|\cdot\|)$是 Banach 空间，$\dim X = n^2$，则一定存在 X 的 n 维子空间 X_0，及 X_0 上一个 Euclid 范数（即由内积导出的范数）$|||\cdot|||$，使

(1) $\|y\| \leqslant |||y|||$，$\forall y \in X_0$；

(2) 存在 X_0 上关于 $|||\cdot|||$ 的一个正规化正交基 $(y_i)_{i=1}^n$，使 $\frac{1}{8} \leqslant \|y_i\|$，$1 \leqslant i \leqslant n$。

我们首先证明一个引理。

引理 4.2.2（Auerbach 引理）　令 X 是 n 维 Banach 空间，则必存在$(x_i)_{i=1}^n \subset S(X)$，$(x_i^*)_{i=1}^n \subset S(X^*)$，使 $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$（$\delta_{ij} = 0$，$i \neq j$，$\delta_{ii} = 1$）。

注　满足上述条件的$(x_i, x_i^*)_{i=1}^n$称为 X 的 Auerbach 组。引理 4.2.2 即可述为对任何有限维 Banach 空间，一定存在 Auerbach 组。□

证明　任取 X 的一个 Schauder 基(Hamel 基)$(e_i)_{i=1}^n$，

对$\{y_i\}_{i=1}^n \subset U(X)$，$y_i = a_{i,1}e_1 + \cdots + a_{i,n}e_n$，$1 \leqslant i \leqslant n$，

$$\text{令 } V(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,n} \\ a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}a_{n,2}\cdots a_{n,n} \end{vmatrix},$$

则 $V(y_1,\cdots,y_n)$ 在 $(x_i)_{i=1}^n(\subset S(X))$ 达到它的最大值。

$$令\ x_i^*(x)=\frac{V(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)}{V(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)},$$

则 $(x_i)_{i=1}^n\subset S(X)$，$(x_i^*)_{i=1}^n\subset S(X^*)$ 即所求。证毕。

定理 4.2.1 的证明　令 $(x_j)_{j=1}^{n^2}$ 是 X 中 Auerbach 组（由引理 4.2.2 知它一定存在）。

令 $|||x|||_1=n\left(\sum_{j=1}^{n^2}|x_j^*(x)|^2\right)^{1/2}$，$\forall x\in X$，

考虑下列命题(*)：

X 的每个子空间 C，若 $\dim C>\frac{1}{2}\dim X$，则存在 $y\in C$，使 $|||y|||_1=1$，且 $\frac{1}{8}\leqslant\|y\|$。

(1) 若(*)成立：取 $C_1=X$，则 $\dim C=n^2$ $\left(>\frac{1}{2}\dim X=\frac{1}{2}n^2\right)$.

由(*)存在 $y_1\in C_1$，$|||y_1|||_1=1$，$\|y_1\|>\frac{1}{8}$。

取 $y_1^*\in X^*$，使 $|||y_1^*|||_1=y_1^*(y_1)=1$。

再取 C_1 的子空间 $C_2=\perp(y_1^*)\equiv\{y\in C_1;y_1^*(y)=0\}$，则

$$\dim C_2=n^2-1\left(>\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}\text{diam}\,X\right).$$

再由(*)，取 $y_2\in C_2$，使 $|||y_2|||_1=1$，$\|y_2\|\geqslant\frac{1}{8}$。

继续下去至少可得 $\left[\frac{1}{2}\dim X\right]$ 个 y_i，由 $\left[\frac{1}{2}\dim X\right]=\left[\frac{1}{2}n^2\right]>n$，知 $|||\cdot|||_1$ 及 $(y_i)_{i=1}^n$ 满足定理结论。因为，对任 $x\in X$

$$\frac{|||x|||_1}{n^2}\leqslant\max_j|x_j^*(x)|\leqslant\|x\|\leqslant\sum_{j=1}^{n^2}|x_j^*(x)|\leqslant|||x|||_1,$$

即 $$\frac{1}{n^2}|||x|||_1\leqslant\|x\|\leqslant|||x|||_1.$$

(2) 若(*)不成立，则存在 X 的一个子空间 B_2，使

$$\dim B_2 > \frac{1}{2}\dim X = \frac{1}{2}n^2$$

且 $$\frac{1}{n^2}\|y\|_1 \leqslant \|y\| \leqslant \frac{1}{8}\|y\|_1, \forall y \in B_2.$$

令$\|y\|_2 = \frac{1}{8}\|y\|_1$,则$\|y\|_2$ 也是 B_2 上 Euclid (内积)范数,且

$$\frac{8}{n^2}\|y\|_2 \leqslant \|y\| \leqslant \|y\|_2, \forall y \in B_2 .$$

这时考虑 B_2,$\|\cdot\|_2$ 及相应命题(*),若对 B_2, $\|\cdot\|_2$ 相应命题(*)成立,则也可得定理结论。否则,存在 B_2 的子空间 B_3,使

$$\dim B_3 > \frac{1}{2}\dim B_2 > \frac{1}{2^2}n^2,$$

同时存在 B_3 上一个 Euclid 范数$\|\cdot\|_3$,使

$$\frac{8^2}{n^2}\|y\|_3 \leqslant \|y\| \leqslant \|y\|_3, \forall y \in B_3,$$

继续这个过程。显然,至多在第$(l-1)$步中止,其中 l 满足$\frac{8^l}{n^2} \leqslant 1$。这时 $\dim B_l \geqslant \frac{n^2}{2^{l-1}}$。

在 B_l 中,我们可找到至少 $\left[\frac{1}{2}\dim B_l - 1\right]$个元 y_i,它们关于 $\|\cdot\|_l$ 正交且 $\|y_i\|_l = 1$, $\|y_i\| > \frac{1}{8}$, $\forall i$。由于 $8^l \leqslant n^2$,故$\frac{n^2}{2^l} - 1 > n$,从而$\left[\frac{n^2}{2^l}\right] - 1 \geqslant n$。证毕。

(I) D-R 定理的证明:令 $\lambda_i > 0$,$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 < +\infty$,取$(n_k)_{k=1}^{\infty}$,使$\sum_{i=n_k}^{\infty}\lambda_i^2 \leqslant 2^{-2k}$,$k = 1, 2, \cdots$。

由定理 4.2.1,在每个无限维 Banach 空间 X 中,存在$\{y_i\}_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}$,使$\|y_i\| = 1$,且对任意纯量列$(a_i)_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}$

$$\left\|\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i y_i\right\| \leqslant 8\left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1)$$

事实上，由定理 4.2.1，存在$(u_i)_{i=1}^n$，使

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i u_i\right|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n a_i u_i\right\|,\quad \frac{1}{8}\leqslant\|u_i\|,1\leqslant i\leqslant n.$$

令 $y_i=\dfrac{u_i}{\|u_i\|}$，$1\leqslant i\leqslant n$，则利用$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$是 Euclid 范数及 $(y_i)_{i=1}^n$关于$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$是正交的，有

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i y_i\right|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\right\|=\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2|\!|\!|y_i|\!|\!|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 8\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)^{1/2}$$

即(4.1)成立。

特别地，令 $x_i=\lambda_i y_i$，$\forall i$，则对 $\theta_i=\pm1$ 的每个选取，利用(4.1)式有

$$\left|\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}\theta_i x_i\right|\leqslant 8\left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 8\cdot 2^{-k},$$

故$\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 无条件收敛，且$\|x_i\|=\|\lambda_i y_i\|=\lambda_i$，$\forall i$。证毕。

(Ⅱ)D-R 定理的第二个证明

由上面证明知，只需要找到满足(4.1)的$(y_i)_{i=1}^n$。并且可以用其他常数 a 来代替(5.1)式中常数 8。由此，我们仅须证明下面的引理。

引理 4.2.3 令X是m维Banach空间，则存在$(x_i)_{i=1}^m\subset S(X)$，使对任$(t_j)_{j=1}^i$，$1\leqslant i\leqslant m$，

$$\left|\sum_{j=1}^i t_j x_j\right|\leqslant\left(1+\left(i\frac{i-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{j=1}^i t_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明　考虑内接于 $U(X)$ 的最大体积的椭圆体 E。通过线性变换可使 $E=\left\{(t_1,\cdots,t_m);\sum_{i=1}^m t_i^2\leqslant 1\right\}$。

令由 E 决定的 X 上范数为$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，它是一个 Euclid 范数。

下面将对之进行归纳构造，得到关于$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$的规范化正交基$(u_i)_{i=1}^m$，及$(x_i)_{i=1}^m\subset X$，使$\|x_i\|=|\!|\!|x_i|\!|\!|=1$，$1\leqslant i\leqslant m$，且

(1) $x_i=\sum_{j=1}^i a_{ij}u_j$，其中 $a_{ij}\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant m$；

(2) $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^2 \leqslant \frac{i-1}{n}, 1\leqslant i\leqslant m$.

第一步：设 $x_1\in X$，使 $\|x_1\| = |\!|\!|x_1|\!|\!| = 1$，即 x_1 是 $S(X)$ 与 $S(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|) \equiv \{x\in X; |\!|\!|x|\!|\!| = 1\}$的交点。

令 $u_1 = x_1$，且取 $u_2, \cdots, u_m \in X$，使$|\!|\!|u_i|\!|\!| = 1, i = 2, \cdots, m$，同时 $(u_i)_{i=1}^m$关于$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$正交。

第二步：假设 $x_1, \cdots, x_i$ 和 $u_1, \cdots, u_i$，$1\leqslant i<m$ 已经选好满足(1)、(2)，对一切 $j\leqslant i$。补充 $u_{i+1}, \cdots, u_m\in X$，使得 $|\!|\!|u_j|\!|\!| = 1$，$j = i+1, \cdots, m$，且$(u_i)_{i=1}^m$关于$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$正交。

对任何 $\varepsilon>0$，

令$E_\varepsilon = \left\{x = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i;\ (1+\varepsilon)^{m-i}\left(\sum_{j=1}^i \alpha_j^2\right) + (1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-i}\left(\sum_{j=i+1}^m \alpha_j^2\right)\right.$ $\left.\leqslant 1\right\}$，易见这是一个体积大于 E 的椭圆体。由于 E 的极大性，存在 $p_\varepsilon\in E_\varepsilon\backslash U(X)$，从而$[0, p_\varepsilon]\cap S(X)\neq\Phi$，令

$$q_\varepsilon \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = [0, p_\varepsilon]\cap S(X).$$

显然，$q_\varepsilon\notin E$，故$\sum_{j=1}^m \alpha_j^2\geqslant 1$。又因

$$(1+\varepsilon)^{m-i}\left(\sum_{j=1}^i \alpha_j^2\right) + (1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-i}\left(\sum_{j=i+1}^m \alpha_j^2\right)\leqslant 1,$$

故 $$((1+\varepsilon)^{m-i}-1)\left(\sum_{j=1}^i \alpha_j^2\right) + ((1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-i}-1)\left(\sum_{j=i+1}^m \alpha_j\right)\leqslant 0,$$

两边除 ε，有

$$\frac{1}{\varepsilon}((1+\varepsilon)^{m-i}-1)\left(\sum_{j=1}^i \alpha_j^2\right) + \frac{1}{\varepsilon}((1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-i}-1)\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j^2\right)\leqslant 0, \tag{4.2}$$

因$\{q_\varepsilon\}\subset S(X)$，$X$ 是有限维，因而 $S(X)$是紧的，且当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时，E_ε 的体积趋于 E 的体积，因此，存在(q_ε)的子列 $(q_{\varepsilon_n})_{n=1}^\infty$，使

$$q_{\varepsilon_n}\longrightarrow q = \sum_{i=1}^m a_i u_i \in S(X)\cap S(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|).$$

由(4.2)式知，

$$(m-i)\left(\sum_{j=1}^{i}\alpha_j^2\right)+(-i)\left(\sum_{j=i+1}^{m}\alpha_j^2\right)\leqslant 0,$$

因$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2\leqslant 1$，所以

$$\sum_{j=1}^{i}\alpha_j^2\leqslant\frac{i}{m}.$$

选 u_{i+1}^0，使$|||u_{i+1}^0|||=1$，且$(u_1,\cdots,u_i,u_{i+1}^0)$关于$|||\cdot|||$两两正交，$u_{i+1}^0\in\operatorname{span}\{u_1,\cdots,u_i,x_{i+1}\}$。再补充$(u_{i+2}^0,\ \cdots,u_m^0)$使$(u_1,\cdots,\ u_i,\ u_{i+1}^0\cdots,u_m^0)$构成关于$|||\cdot|||$的正规化正交基。则$(x_1,\ \cdots,\ x_{i+1})$关于$(u_1,\cdots,u_i,u_{i+1}^0,\cdots,u_m^0)$满足(1)、(2)。由此，显然知道归纳程序完成。

由(2)知$|||x_i-u_i|||^2=\left((1-a_{ii})^2+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}^2\right)\leqslant 2\ \frac{i-1}{m}$，由于$E\subset U(X)$，故$\|x\|\leqslant|||x|||$，$\forall x\in X$，因此，对任何 $t_1,\cdots,t_i$，有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{i}t_jx_j\right\|&\leqslant\left\|\sum_{j=1}^{i}t_ju_j\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{i}t_j(x_j-u_j)\right\|\\&\leqslant\left|||\sum_{j=1}^{i}t_ju_j\right|||+\sum_{j=1}^{i}|t_j|\,|||x_j-u_j|||\\&\leqslant\left(\sum_{j=1}^{i}t_j^2\right)^{\frac12}+\left(\sum_{j=1}^{i}t_j^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=1}^{i}2\frac{j-1}{m}\right)^{\frac12}\\&=\left[1+\left(\frac{i(i-1)}{2}\right)^{\frac12}\right]\left(\sum_{j=1}^{i}t_j^2\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

证毕。

推论 4.2.4 若 X 是 m 维 Banach 空间，$m\geqslant i(i-1)$，则存在$(x_j)_{j=1}^{i}\subset S(X)$，使对任意数列$(t_j)_{j=1}^{i}$，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{i}t_jx_j\right\|\leqslant 2\left(\sum_{j=1}^{i}t_j^2\right)^{\frac12}.$$

由推论 4.2.4，同(Ⅰ)证法可证得 D-R 定理。

(Ⅲ)D-R 定理的第三个证明(Grothendeick 方法)

定义 4.2.1 若 $1\leqslant p<+\infty$，$T\in L(X,\ Y)$称为 p 可和算子，

若对任意$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使得$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x)|^p<+\infty,\forall x^*\in X^*$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^p<+\infty.$$

记 X 到 Y 的全体 p 可和算子为 $\prod_p(X,Y)$。

令 $l_p^w(X)=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X;\ \|(x_n)\|\equiv\sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}};\right.\right.$ $\left.\left.x^*\in X^*,\ \|x^*\|\leqslant 1\right\}<+\infty\right\}$，

记 $l_p(X)=(\Sigma\oplus X)_p=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X;\ \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|\right.$

$$\left.\equiv\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}.$$

用闭图象定理易见，若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^p<+\infty$，$\forall x^*\in X^*$，则$(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_p^w(X)$，且 $l_p^w(X)$是 Banach 空间，还有

$$T\in\prod_p(X,Y)\Longleftrightarrow T(l_p^w(X))\subset l_p(Y).$$

命题 4.2.5 对每个 $T\in\prod_p(X,Y)$，定义
$\hat{T}((x_n)_{n=1}^{\infty})=(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$，$\forall(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_p^w(X)$，则 $\hat{T}\in L(l_p^w(X),$ $l_p(Y))$。

证明　显然$\hat{T}$是线性的，易见 $\hat{T}$ 是闭线性算子，从而由闭图象定理$\hat{T}\in L(l_p^w(X),l_p(Y))$。

$$\|\hat{T}\|=\sup\{\|(Tx_n)_{n=1}^{\infty}\|;\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|\leqslant 1\},$$

故

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|\hat{T}\|\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证毕。

命题 4.2.6 令 $\prod_p(T)\equiv\|T\|_{\pi_p}=\|\hat{T}\|$，则

(1) $\prod_p(T)=\inf\left\{\rho>0;\right.$

$$\left.\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\rho\sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}};\|x^*\|\leqslant 1,x^*\in X_*\right\}\right.$$

$(x_n)_{n=1}^m \subset X \Big\}$.

(2) $T\in\prod_p(X,Y) \Longleftrightarrow \exists C>0$，使若 $(x_n)_{n=1}^\infty\subset X$，

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,\ \forall x^*\in X^*,$$

则
$$\left(\sum_{n=1}^\infty \|Tx_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{n=1}^\infty |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\Longleftrightarrow \exists C>0,\ 使\left(\sum_{n=1}^m \|Tx_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{n=1}^m |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall (x_n)_{n=1}^m\subset X.$$

(3) $\|T\|\leqslant\prod_p(T)$.

(4) $(\prod_p(X,Y),\prod_p(\cdot))$ 是 Banach 空间..

证明　利用命题 4.2.5 即可得(1)、(2)、(3)。(4)的证明也是标准的。留给读者作为习题。证毕。

定理 4.2.7 (Grothendieck-Pietsh 定理)　若 $1\leqslant p<+\infty$，$T\in\prod_p(X,Y)$，则存在 $(U(X^*),w^*)$ 上正则 Borel 概率测度 μ，使

$$\|Tx\|^p\leqslant\prod\nolimits_p^p(T)\int_{U(X^*)}|x^*(x)|^p d\mu,\quad \forall x\in X.$$

证明　对 $(x_i)_{i=1}^n\subset X$，定义

$$f_{(x_i)_{i=1}^n}(x^*)=\prod\nolimits_p^p\sum_{i=1}^n|x^*(x_i)|^p-\sum_{i=1}^n\|Tx_i\|^p,\ \forall x^*\in U(X^*).$$

显然 $f_{(x_i)_{i=1}^n}\in C((U(X^*),w^*))\equiv\{f$ 是 $(U(X^*),w^*)$ 上连续函数，$\|f\|=\sup\limits_{x^*\in U(X^*)}|f(x)|\}$。

且由 $T\in\prod_p(X,Y)$ 知，$f_{(x_i)_{i=1}^n}$ 在某点 $x^*\in U(X^*)$ 大于 0。

令 $A=\{f_{(x_i)_{i=1}^n};\ (x_i)_{i=1}^n\subset X\}(\subset C((U(X^*),w^*)))$，

再令 $B=\{f\in C((U(X^*),w^*)),\ f(x^*)<0,\forall x^*\in U(X^*)\}$，则易见 A、$B$ 是凸集，$A\cap B=\varnothing$，int $B\neq\varnothing$，由分离定理及 Riesz 表现定理知，存在 $(U(X^*),w^*)$ 上正则 Borel 测度 μ，使对一切 $f\in B$，$g\in A$，有

$$\int_{U(Y^*)} f d\mu = \mu(f) \leqslant 0 \leqslant \mu(g) = \int_{U(X^*)} g d\mu.$$

由于 $\mu(f)\leqslant 0, \forall f\in B$，故 $\mu(-f)\geqslant 0, \forall f\in B$，故 μ 为正测度，将 μ 正规化，得到一个概率测度，仍记为 μ。由于 μ 在 B 上是非负的，故

$$\|Tx\|^p \leqslant \prod_p^p(T)\int_{U(Y^*)} |x^*(x)|^p d\mu, \forall x\in X.$$

证毕。

注　由于X线性等距于$C((U(X^*), w^*))$的一个子空间。令X_p为 X 在 $L_p((U(X^*), w^*), \mu)$中的完备化，则对$T\in\prod_p(X, p)$，可将 T 延拓为 $X_p \longrightarrow Y$ 的一个有界线性算?S。再令 $G: X \longrightarrow X_p$ 为自然嵌入，则$\|G\|\leqslant 1$。

我们有 $T = SoG$，即 T 有如下因子分解。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ & \searrow \qquad \nearrow S & \\ & X_p \subset L_p((U(X^*), w^*), \mu) & \end{array}$$

注意由于对 $p\neq 2$，X_p 不必在 $L_p((U(X^*), w^*), \mu)$中可补，因此 S 不一定可延拓为 $L_p((U(X^*), w^*), \mu)$到 Y 的有界线性算子。

从上面看到 $T\in\prod_p(X, Y)$有良好的因子分解性质，从而使 T 也具有许多性质。

定理 4.2.8　若 $T\in\prod_p(X, Y)$，则 T 是 w 紧算子，T 也是 DP 算子。

证明　(1) 由定理 4.2.7 注知 $T = SG$，因当 $1 < p < +\infty$，$L((U(X^*), w^*), \mu)$是自反的，因此 T 因子分解通过自反空间，所以 $T\in WK(X, Y)$。

当 $p = 1$ 时，我们可把 G 看作 X 到 $L_2((UX^*), w^*), \mu)$ 的

自然嵌入映象与 $L_2((U(X^*), w^*)\mu)$ 到 $L_1((U(X^*), w^*), \mu)$ 的自然嵌入映象的结合，故 T 也因子分解通过自反空间，从而 $T\in WK(X,Y)$。证毕。

(2) 若 $x_n \xrightarrow{w} x$，则 $\|x_n\|\leqslant M, \forall n$，对某个 $M>0$。

又由于 $Gx_n(x^*)\longrightarrow Gx(x^*), \forall x^*\in U(X^*)$，根据 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\int_{U(X^*)} |Gx_n(x^*) - Gx(x^*)|^p d\mu \longrightarrow 0,$$

即 $\|Gx_n - Gx\|\longrightarrow 0$，从而 $\|Tx_n - Tx\|\longrightarrow 0$，这表明

$$T\in DP(X,Y)。证毕。$$

推论 4.2.9 若 $1\leqslant p, r<+\infty$，$T\in\prod_p(X,Y)$，$S\in\prod_r(Y,Z)$，则 $ST\in K(X,Z)$。

证明 由 T 是 w 紧算子，S 是 DP算子立即得到。证毕。

定理 4.2.10 若 $\dim X=+\infty, 1\leqslant p<+\infty$，则 $I\notin\prod_p(X,X)$，其中 I 表示恒等算子。

证明 否则 $I\in\prod_p(X,X)$，由推论 4.2.9 知，$I^2=I$ 是紧算子，$\dim X<+\infty$，矛盾。证毕。

下面应用上述结果证明 D-R 定理，为此，我们再对 wuc 级数与 wuC 级数进行一些讨论。

定理 4.2.11(Orlicz-Pettis 定理) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是 w 子级数收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是无条件收敛。

证明 这个定理实际是 Pettis 可测性定理(定理 2.1.1：可分 Banach 空间中 w 可测函数是 μ 可测函数)的直接推论。

容易看到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛当且仅当对 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的任何子序列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_{n_i}$ 是收敛的。故充分性立即可得出。

必要性，设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是 w 子级数收敛，但不是无条件收敛，故存

在$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使$\sum_{i=1}^{\infty}x_{n_i}$是 w 收敛的，但不是范数收敛。因此存在 $\varepsilon>0$，及 $j_1<l_1<j_2<l_2<\cdots$，使

$$\left\|\sum_{i=j_n}^{l_n}x_{n_i}\right\|>\varepsilon.$$

令$y_n=\sum_{i=j_n}^{l_n}x_{n_i}$，则 $w-\lim_n\sum_{i=1}^{n}y_i$ 存在，从而

$$y_n\xrightarrow{w}0,\text{ 且 }\|y_n\|>\varepsilon.$$

令 $\Omega_n=\{-1,1\}$，

$$\mu_n\{-1\}=\mu_n\{1\}=\frac{1}{2}.$$

$$\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n,\quad \mu=\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n,$$

Σ 是 Ω 的 Borel 子集的 σ 代数，故(Ω,Σ,μ)是概率测度空间。令

$$f:\Omega\longrightarrow X,$$

$$f((\varepsilon_n))=w-\lim\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k y_k(\text{其中 }\varepsilon_n=\pm1).$$

易见，f 是 w 可测的，且 $f(\Omega)\subset\overline{\text{span}}(y_n)_{n=1}^{\infty}=Y$，$Y$ 是 X 的可分闭子空间，由 Pettis 可测性定理(定理 2.1.1)知，f 是 μ 可测的，且由$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是 w 子级数收敛，知对每个 $x^*\in X^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(y_n)|<+\infty,$$

因而$f(\Omega)$是 w 有界的，从而$f(\Omega)$是有界的，因而 f 是 Bochner 可积的。

令 $E_n=\{(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}\in\Omega;\varepsilon_n=1\}$，则$E_n\in\Sigma$，且

$$\int_{E_n}fd\mu=\frac{1}{2}y_n,$$

因而$(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset\left\{2\int_E fd\mu;E\in\Sigma\right\}$，由于 f 是 Bochner 可积的，μ 是概率测度，容易看到，$\left\{2\int_E fd\mu;\ E\in\Sigma\right\}$是相对紧集，故由

$$y_n \xrightarrow{w} 0 \text{ 知，}$$

$y_n \longrightarrow 0$，这与$\|y_n\| \geqslant \varepsilon$矛盾。证毕。

命题 4.2.12 设$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$，则 TFAE：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 wuC 的；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty, \forall x^* \in X^*$；

(3) $\exists C>0$，使 $\sup\limits_n \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} t_k x_k \right\| \leqslant C \sup\limits_n |t_n|, \forall (t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$。

(4) 对任何$(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n < +\infty$；

(5) 对任何$(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ 无条件收敛；

(6) $\exists C>0$，使$\|\sum\limits_{n \in \Delta} \pm x_n\| \leqslant C$，其中 Δ 为自然数的任何有限集。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 固定 $x^* \in X^*$，任取自然数置换 π，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_{\pi(k)}) \text{ 收敛，}$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)$无条件收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty$。$\forall x^* \in X^*$。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(1) 对自然数的任何置换 π，任何 $x^* \in X^*$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_{\pi(k)})| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty,$$

知$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x^*(x_{\pi(k)})\right)_{n=1}^{\infty}$是 Canchy 数列，故$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_{\pi(k)}\right)_{n=1}^{\infty}$是 w Cauchy 列，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 为 wuC。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3) 令 $T: X^* \longrightarrow l_1, Tx^* = (x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}, \forall x^* \in X^*$，

易见 T 是闭线性算子，由闭图象定理知 $T \in L(X^*, l_1)$ 从而 $T^* \in L(l_\infty, X^{**})$。

对任$(t_n)_{n=1}^{\infty} \in U(l_\infty)$，$x^* \in U(X^*)$，

$$\left|x^*\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right)\right| = |(t_1,\cdots,t_n,0\cdots)(Tx^*)|$$

$$= |T^*((t_1,\cdots,t_n,0\cdots)(x^*))|$$

$$\leqslant \|T^*\| = \|T\|,$$

故 $\left\|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\| \leqslant \|T\| \sup_n |t_n|, \forall (t_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$。证毕。

(3)$\Longrightarrow$(4) 设$(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$，则对 $n > m$，有

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} t_k x_k\right\| \leqslant C \sup_{m<k<n} |t_k| \longrightarrow 0.$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ 收敛，证毕。

(4)$\Longrightarrow$(5) 因为$(t_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$，得出$(\pm t_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$，故

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm t_k x_k < +\infty,$$

从而$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ 是无条件收敛。证毕。

(5)$\Longrightarrow$(6) 令 $T: c_0 \longrightarrow X$,

$$T((t_k)_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k, \forall (t_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0,$$

易见 T 是闭线性算子，故由闭图象定理 $T \in L(c_0, X)$ 从而

$$\left\|\sum_{n\in\Delta} \pm x_n\right\| \leqslant \|T\|,$$

对自然数的任何有限集 Δ 及$\pm$的任何选取。证毕。

(6)$\Longrightarrow$(2) $x^*(\sum_{n\in\Delta} \pm x_n) \leqslant \|\sum_{n\in\Delta} \pm x_n\| \leqslant C$, $\forall x^* \in U(X^*)$，故易见$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty, \forall x^* \in X^*$。证毕。

推论 4.2.13 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是 Banach 空间 X 中基序列，且 $\sum_n x_n$ 是 wuC，$\inf_n \|x_n\| > 0$，则

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{c_0}.$$

证明 由于$\sum_n x_n$ 为 wuC，根据定理 4.2.12 知，对

$$\forall (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n < +\infty,$$

反之，若$(t_n)_{n=1}^{\infty}$，使$\sum_{n=1}^{\infty}t_nx_n<+\infty$，则$\left(\sum_{k=1}^{n}t_kx_k\right)_{n=1}^{\infty}$为Cauchy列，因此

$$|t_n|=\frac{1}{\|x_n\|}\left\|\sum_{k=1}^{n}t_kx_k-\sum_{k=1}^{n-1}t_kx_k\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\inf\limits_k\|x_k\|}\left\|\sum_{k=1}^{n}t_kx_k-\sum_{k=1}^{n-1}t_kx_k\right\|\longrightarrow 0,$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}t_ne_n<+\infty$（其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$为 c_0 的自然基）。

令
$$T: c_0\longrightarrow\overline{\text{span}}(x_n)_{n=1}^{\infty},$$

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_ne_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}t_nx_n,$$

由上面证明 T 是可以定义的，且易见 T 为闭线性算子，由闭图象定理，T 是有界线性算子。由于 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是基序列，即$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是$\overline{\text{span}}(x_n)_{n=1}^{\infty}$的基，故 T 是1-1满线性算子，即T是c_0到$\overline{\text{span}}(x_n)_{n=1}^{\infty}$上的线性同胚，且 $Te_n=x_n$，$\forall n$。故$(x_n)_{n=1}^{\infty}\approx(e_n)_{c_0}$。证毕。

定理 4.2.14（Bessaga-Pelezynski 定理） 设 X 为Banach空间，则

$$c_0\hookrightarrow X\Longleftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\text{ 是 wuC 的}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x_n\text{ 是 uc 的}\right).$$

证明 "$\Longrightarrow$" 若$c_0\hookrightarrow X$，则由$\sum_{n=1}^{\infty}e_n$为 wuC 但不是 uc 即知矛盾。证毕。

"$\Longleftarrow$" 若有$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是 wuC 的但非 uc 的，则存在$(p_n)_{n=1}^{\infty}$，$(q_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $p_1<q_1<p_2<q_2<\cdots$，$y_n=\sum_{i=p_n}^{q_n}x_i$，

$$y_n\xrightarrow{w}0,\quad\inf_n\|y_n\|>0,$$

将$(y_n)_{n=1}^{\infty}$正规化$\left(\text{即考虑}\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)$仍记为$(y_n)_{n=1}^{\infty}$，由基序列选

择原理(见附录2)，$(y_n)_{n=1}^{\infty}$有子列，仍记$(y_n)_{n=1}^{\infty}$为基序列，但此时$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$仍为 wuC，由推论 4.2.13 知$(y_n)_{n=1}^{\infty}\approx(e_n)_{c_0}$，矛盾。证毕。

D-R 定理的第三个证明　若 $c_0\subset\to X$，则由§1说明易见，存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是 uc 的但非绝对收敛。

若 $c_0\subset\!\!\not\to X$，若对任何$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是 uc 的推出$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$绝对收敛。

由定理 4.2.14 和引理 4.2.13 知，对任何$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty,\ \forall x^*\in X^*,$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty.$$

这表明恒等算子 $I\in\prod_1(X,X)$，由定理 4.2.10 知，$\dim X<+\infty$，矛盾！因此必存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\sum_{n=1}^{\infty}$　是 uc 的，但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|=+\infty.$$

证毕。

§3　一般的 Dvoretsky 定理

Dvoretsky 定理(一般形式)　对每个 $\varepsilon>0$，存在一个(仅依赖于 ε 的)绝对常数 $C(\varepsilon)$，使得对任何 n 维 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$，存在 X 的一个子空间 Y，使

(1) $\dim Y=k\geqslant C(\varepsilon)\log n$;

(2) 存在 Y 上一个 Euclid$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，使

$$(1-\varepsilon)|\!|\!|y|\!|\!|\leqslant\|y\|\leqslant(1+\varepsilon)|\!|\!|y|\!|\!|,\ \forall y\in Y.$$

注 1　定理的几何意义是十分有趣的：若 B 是 R^n 中有界均

衡凸体，则 B 有一个通过原点的 k 维（$k\geqslant C(\varepsilon)\log n$）截口，使得这个截口是某个椭圆的 ε 扰动。特别地，对任何无限维 Banach 空间 X 的任何 n 维子空间 X_n，一定存在 X_n 的 k 维（$k\geqslant C(\varepsilon)\log n$）子空间 Y，使 Y 上存在一个与原来范数 $(1+\varepsilon)$ 等价的 Euclid 范数。□

注 2　由这个定理容易给出 D-R 定理的第四个证明。□

定理 4.3.1　对任何无限维 Banach 空间 X，有 Hilbert 空间 $<X$，即 Hilbert 空间可在任何无限维 Banach 空间 X 中有限表示。

证明　由 Dvoretsky 定理的注 1 立即得出。证毕。

为了给出 Dvoretsky 定理的证明。我们首先要给出Euclid 球面 $S^n=\left\{(x_i)_{i=1}^{n+1}\in R^{n+1},\ \sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\right\}$的等周不等式的证明。下面分几步进行。

一、若干预备工具

令 (K,d) 是一个紧度量空间。$\sigma: K\longrightarrow L$ 是一个满等距对合映象，即 $d(\sigma(x),\sigma(y))=d(x,y)$，$\forall x,y\in K$（等距），且

$$\sigma^2(x)\equiv\sigma(\sigma(x))=x,\ \forall x\in K\text{（对合）}.$$

令 $K_0=\{x\in K,\sigma(x)=x\}$，即 K_0 是 K 关于 σ 的不动点集。

我们将 $K\backslash K_0$ 分解成两个集合 K_+,K_-，使

$$\sigma: K_+\longrightarrow K_-$$

是满等距，且 $K\backslash K_0=K_+\cup K_-$，$K_+\cap K_-=\Phi$。易见，这样的分解是存在的（但可能不是唯一的）。称 K_+为上半部分，K_-为下半部分。

定义 4.3.1　我们称分解 (K_+,K_-) 是有效的，如果

$$d(x,y)\leqslant d(x,\sigma(y)),\ \forall x,y\in K_-.$$

性质 4.3.1　若分解 (K_+,K_-) 是有效的，则

$$d(x,y)\leqslant d(x,\sigma(y)),\ \forall x,y\in K_+.$$

证明　设 $x,y\in K_+$，则由分解的有效性知，

$$d(x,y)=d(\sigma(x),\sigma(y))\leqslant d(\sigma(x),\sigma^2(y))$$
$$=d(\sigma(x),y)=d(\sigma^2(x),\sigma(y))$$
$$=\sigma(x,\sigma(y))。$$

证毕。

性质 4.3.2 设(K_+,K_-)是 $K\backslash K_0$ 的一个分解，则分解(K_+,K_-)是有效的当且仅当对任 x、$y\in K\backslash K_0$，若 y(或 $\sigma(y)$)与 x 在同一部分，则

$d(y,x)\leqslant d(\sigma(y),x)$(相应地，$d(\sigma(y),x)\leqslant d(y,x)$)。

证明 "$\Longrightarrow$" 任取 $x,y\in K\backslash K_0$，不妨设 $x\in K_+$，

(1) 若 $y\in K_+$，则由性质 4.3.1 知，

$$d(x,y)\leqslant d(x,\sigma(y))。$$

(2) 若 $y\in K_-$，则 $\sigma(y)\in K_+$，再由性质 4.3.1 知

$$d(x,\sigma(y))\leqslant d(x,\sigma(\sigma(y)))=d(x,y)。$$

证毕。

"$\Longleftarrow$" 任取 $x,y\in K_-$，则 $\sigma(y)\in K_+$，由条件

$$d(x,y)\leqslant d(x,\sigma(y)),$$

故分解(K_+,K_-)是有效的。证毕。

例 4.3.1 令 $S^n=\left\{x=(x_i)_{i=1}^{n+1}\in R^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\right\}$。

在 S^n 中定义两点 x,y 的距离 $d(x,y)$为测地线距离，即连接 x,y 的大圆中较小一段的弧长。显然(S^n,d)是紧度量空间。

定义 $S^n\longrightarrow S^n$ 的满等距对合映象 σ_H 如下：固定 $x_N\in S^n$，称它为北极，任取 R^{n+1}的不通过 x_N 的 n 维子空间 H。$\sigma_H:S^n\longrightarrow S^n$ 定义为关于 H 的垂直反射，即若 $x\in S^n$，且 $x=h+z$，其中 $h\in H$，$z\perp H$，令 $\sigma_Hx=h-z$。

容易看到映象 σ_H 的不动点集 $(S^n)_0=S^n\cap H$。H 将 $S^n\backslash(S^n)_0$ 分成两半，记含 x_N 的一半为$(S^n)_+$，另一半为$(S^n)_-$，我们看到$((S^n)_+,(S^n)_-)$是(关于 σ_H)的有效分解。事实上，不妨设

$$H=\{x=(x_i)_{i=1}^{n+1}\in R^{n+1};x_{n+1}=0\},$$

$$x_N = (x_1^0, \cdots, x_n^0, \ x_{n+1}^0), \text{其中 } x_{n+1}^0 > 0。$$

设 $x = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}), y = (y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}) \in (S^n)_-$，则

$$x_{n+1}, y_{n+1} < 0,$$

$$\sigma_H(y) = (y_1, \cdots y_n, -y_{n+1}),$$

故 $\|x - y\|_2 \leqslant \|x - \sigma_H(y)\|_2$（其中

$$\|(x_i)_{i=1}^{n+1}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}）。$$

但测地线度量 $d(x, \cdot)$ 是 $\|x - \cdot\|_2$ 的增加函数，故也有

$$d(x, y) \leqslant d(x, \sigma_H(y))。$$

这表明 $((S^n)_+, (S^n)_-)$ 是（关于 σ_H）的有效分解。□

下面对紧度量空间 (K, d)，满等距对合映象 $\sigma: K \longrightarrow K$，$K$ 的有效分解 $K = K_+ \cup K_0 \cup K_-$，定义一个集 A $(\subset K)$ 的对称集 A^*。

定义 4.3.2 K 的子集 A（关于 σ 及分解 $K = K_+ \cup K_0 \cup K_-$）的对称集 A^* 是如下三集之并：

(1) $A \cap (K^+ \cup K_0)$；

(2) $\{a \in A \cap K_-; \sigma(a) \in A\}$；

(3) $\{\sigma(a); a \in A \cap K_-, \text{且 } \sigma(a) \notin A\}$。

注 1 A^* 就是将 $A \cap (K_+ \cup K_-)$ 的元保留下来，对 A 中其它元，如果它在 σ 作用下仍在 A 中的，则将它保留下来，否则将它换成 σ 作用后的元。这样，A^* 与 A 相比较，A^* 在 $K_0 \cup K_+$ 中的部分比 A 在 $K_0 \cup K_+$ 中的部分要多。□

注 2 (1) 当 $A \subset K_0 \cup K_+$ 时：$A = A^*$；

(2) 对任 $A \subset K$，下式成立：

$$A \cap \sigma(A) \subset A^* \subset A \cup \sigma A;$$

(3) 若 $B \subset A \subset K$，则 $B^* \subset A^*$。□

注 3 A^* 并非"在通常意义下"A 的对称。但 A^* 是在某种意义下 A 的对称。例如，在 S^n 中，对北极冠(Cap) $C_r \equiv \{x \in S^n; d(x, x_N) \leqslant r\}$，有 $C_r^* = C_r$，事实上，若 $x \in C_r^*$，且 $x = \sigma(a)$，对某

个 $a\in C_r\cap K_-$，且 $\sigma(a)\notin C_r$，则 $d(a,x_N)\leqslant r, d(\sigma(a),x_N)>r$，由于 $a\in K_-$，故 $\sigma(a)\in K_+$，因此又有

$$(r<)d(\sigma(a),x_N)\leqslant d(a,x_N)\leqslant r.$$

矛盾！这表明

$$C_r^*\subset(C_r\cap(K_+\cup K_0))\cup\{a\in C_r\cap K_-;\sigma(a)\in C_r\}\subset C_r.$$

另一方面，如果 $x\in C_r$，分两种情况看：

(1) 若 $x\in C_r\cap(K_+\cup K_0)$，则 $x\in C_r^*$；

(2) 若 $x\in C_r\cap(K_-)$，由前面证明知，此时 $\sigma(x)\notin C_r$ 是不可能的，必有 $\sigma(x)\in C_r$，故 $x\in C_r^*$。

总之，$x\in C_r^*$，即 $C_r\subset C_r^*$，即 $C_r=C_r^*$。 □

下面考虑扰动及扰动与对称的关系。

对任何 $A\subset(K,d)$，令

$$A_\varepsilon=\{x\in K;d(x,A)\leqslant\varepsilon\}$$

称为 A 的 ε 扰动。

命题 4.3.3 设 $K=K_+\cup K_0\cup K_-$ 是由 σ 决定的 K 的一个有效分解，则对任 $A\subset K$，任 $\varepsilon>0$，有

$$(A^*)_\varepsilon\subset(A_\varepsilon)^*.$$

证明 令 $y\in(A^*)_\varepsilon$，选 $x\in A^*$，使 $d(x,y)\leqslant\varepsilon$。下面对 x,y 的不同位置进行讨论，最终证明 $y\in(A_\varepsilon)^*$。

(1) 若 x,y 在不同部分。则 $x,\sigma(y)$ 在同一部分，根据性质 4.3.2 有

$$\begin{aligned}d(y,\sigma(x))&=d(x,\sigma(y))\leqslant d(x,y)\\&=d(\sigma(x),\sigma(y))\leqslant\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.3}$$

由于 $x\in A^*$，且 $A^*\subset A\cup\sigma(A)$，根据(4.3)式，

(a) 当 $x\in A$ 时，我们有 $y\in A_\varepsilon,\sigma(y)\in A_\varepsilon$，故

$$y\in A_\varepsilon\cap\sigma(A_\varepsilon)\subset(A_\varepsilon)^*.$$

(b) 当 $\sigma(x)\in A$ 时，我们有 $y\in A_\varepsilon,\sigma(y)\in A_\varepsilon$，因此，也有 $y\in(A_\varepsilon)^*$。

因此在这种情况，我们有 $y\in(A_\varepsilon)^*$。

(2) 若 $x, y \in K_-$，则 $x \in A^* \cap K_-$，于是我们有 $\sigma(x) \in A$，$x \in A \cap K_- \subset A$，且 $d(x,y) = d(\sigma(x), \sigma(y)) \leqslant \varepsilon$，也有 $y \in A_\varepsilon$，$\sigma(y) \in A_\varepsilon$，从而 $y \in (A_\varepsilon)^*$。

(3) 若 $x, y \in K_+$，则 $x \in A^* \cap K_-$。

(a) 当 $A \cap K_+$ 时，因 $d(x,y) \leqslant \varepsilon$，故 $y \in A_\varepsilon \cap K_+ \subset (A_\varepsilon)^*$。

(b) 当 $x = \sigma(z)$，对某个 $z \in A \cap K_-$，$\sigma(z) \notin A$ 时，则

$$d(\sigma(y), z) = d(y, x) \leqslant \varepsilon,$$

故 $\sigma(y) \in A_\varepsilon$，此时，若 $y \in A_\varepsilon$，则 $y \in (A_\varepsilon)^*$，若 $y \notin A_\varepsilon^*$，因

$$\sigma(y) \in A_\varepsilon \cap K_-,$$

也有 $y \in (A_\varepsilon)^*$，总之 $y \in (A_\varepsilon)^*$。

(4) 若 $x \in K_0$，则

$$d(x,y) = d(\sigma(x), y) = d(x, \sigma(y)) \leqslant \varepsilon,$$

且因 $A^* \cap K_0 \subset A$，故 $x \in A$，从而 $y \in A_\varepsilon$，$\sigma(y) \in A_\varepsilon$，因此

$$y \in (A_\varepsilon)^*.$$

(5) 若 $x \in K_+$，$y \in K_0$，则 $x \in A^* \cup K_-$，且

$$d(x,y) = d(x, \sigma(y)) \leqslant \varepsilon.$$

(a) 当 $x \in A \cap K_+$，则 $y \in A_\varepsilon$，$\sigma(y) \in A_\varepsilon$，从而 $y \in (A_\varepsilon)^*$。

(b) 若 $x = \sigma(z)$，对某个 $z \in A \cap K_-$，$\sigma(z) \notin A$ 时，

$$d(\sigma(z), y) = d(z, \sigma(y)) = d(z, y) \leqslant \varepsilon,$$

故也有 $y \in A_\varepsilon$，$\sigma(y) \in A_\varepsilon$，从而 $y \in (A_\varepsilon)^*$。

总之，$y \in (A_\varepsilon)^*$。

(6) 若 $x \in K_-$，$y \in K_0$，则 $x \in A^* \cap K_- \subset A$，

$$d(x,y) = d(x, \sigma(y)) \leqslant \varepsilon.$$

故 $y \in A_\varepsilon$，$\sigma(y) \in A_\varepsilon$，从而 $y \in (A_\varepsilon)^*$。

证毕。

命题 4.3.4 设 μ 是 K 上在 σ 下不变的概率测度，即 $\mu(A) = \mu(\sigma(A))$，$\forall K$ 的 Borel 可测子集 A，则 $\mu(A^*)) = \mu(A)$，$\forall K$ 的 Borel 可测子集 A。

证明　令 $A_1 = \{a \in A \cap K_-; \sigma(a) \notin A\}$，$A_2 = A \setminus A_1$，则

$$A^* = \sigma(A_1) \cup A_2, \text{且 } \sigma(A_1) \cap A_2 = \Phi, \text{故}$$

$$\mu(A^*) = \mu(\sigma(A_1) \cup A_2) = \mu(\sigma(A_1)) + \mu(A_2)$$

$$= \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A)。\text{证毕。}$$

下面这个命题是十分重要的，它反映了 A 的对称集的扰动后测度变小。

命题 4.3.5 若 $K = K_+ \cup K_0 \cup K_-$ 是 K 关于 σ 的有效分解，μ 是 K 上在 σ 下不变的概率测度，则对 K 的任何 Borel 可测子集 A，有

$$\mu((A^*)_\varepsilon) \leqslant \mu(A_\varepsilon)。$$

证明　由命题 4.3.3 及命题 4.3.4，有

$$\mu((A^*)_\varepsilon) \leqslant \mu((A_\varepsilon)^*) = \mu(A_\varepsilon)。$$

证毕。

下面引入“等周不等式”的定义。

定义 4.3.2 设 K 是紧度量空间，μ 是 K 的 Borel 子集上的概率测度。(K, μ) 的等周不等式指的是：

对每个 $\alpha, 0<\alpha<1$，找一个集 C_α，使

(1) $\mu(C_\alpha) = \alpha$；

(2) 对一切 $A \subset K, \mu(A) = \alpha$，有 $\mu((C_\alpha)_\varepsilon) \leqslant \mu(A_\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$。

注 1　换句话说，即找 K 的 Borel 可测子集，使它在所有测度与它相同的集合中，经扰动后测度变化最小。这样的集 C_α 称为等周不等(关于 α)的一个解。□

注 2　下面将对 S^n 证明等周不等式的解就是所谓 Cap(球冠面)。□

二、S^n 的等周不等式

设 $S^n = \left\{(x_i)_{i=1}^{n+1} \in R^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$，$\mu$ 是 S^n 上的 Haar 测度，即正规化“球面面积”测度。

定理 4.3.6 (S^n, μ) 上等周不等式有解：即对任 α，$0<\alpha<1$，C_α 就是 S^n 上的一个 Cap，使 $\mu(C_\alpha) = \alpha$。

为了证明这个定理，我们先要作几个注记。

注 1　由定义知，我们要证明对任何可测集 $A\subset S^n$，$\mu(A)=\mu(C_\alpha)$，有 $\mu((C_\alpha)_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$。但是，我们首先注意，只须证明对任何闭集 $A\subset S^n$，$\mu(A)=\mu(C_\alpha)$，有

$$\mu((C_\alpha)_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon),\forall\varepsilon>0 \tag{4.4}$$

即可。事实上，若(4.4)式对任何闭集 $A\subset S^n$，$\mu(A)=\mu(C_\alpha)$ 成立。任取可测集 $B\subset S^n$，使 $\mu(B)=\alpha=\mu(C\ )$。由 μ 的正则性，存在闭集列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $A_n\subset A$，$\forall n$，且 $\mu(A_n)\longrightarrow\mu(A)$。显然，

$$(A_n)_\varepsilon\subset A_\varepsilon,\text{从而}$$

$$\mu((A_n)_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon). \tag{4.5}$$

设 Cap C_α 的中心在 x_N，取以 x_N 为中心的一列 $\mathrm{Cap}(C^n)_{n=1}^{\infty}$，使 $\mu(C^n)=\mu(A_n)$，由(4.4)及(4.5)式，

$$\mu((C^n)_\varepsilon)\leqslant\mu((A_n)_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon).$$

容易看到，$\mu((C^n)_\varepsilon)\nearrow\mu((C_\alpha)_\varepsilon)$（$\nearrow$表示递增趋于）。故

$$\mu((C_\alpha)_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon).\quad\square$$

注 2　设 B 是 S^n 的一个闭子集，则容易证明 B^* 也是闭的（这里 B^* 可以是关于 R^{n+1} 的任何 n 维子空间 H 决定的垂直反射的对称（注意这种垂直反射是满等距对合映象）。　$\square$

下面再作几个准备工作

令 $\mathscr{M}=\{A;A\subset S^n,\ A\text{ 是闭集}\}$，在 $\mathscr{M}$ 中引入如下 Hausdorff 距离 ρ，

$$\rho(K,L)=\inf\{\varepsilon>0;K_\varepsilon\supset L,\text{且 }L_\varepsilon\supset K\},\forall K,L\in\mathscr{M}.$$

容易检验 $(\mathscr{M},\rho)$ 是紧度量空间。

对固定闭集 $A\subset S^n$，引入 $(\mathscr{M},\rho)$ 的一个子集 $\mathscr{A}$：

(1) $\mathscr{A}$ 在 $(\mathscr{M},\rho)$ 中闭；

(2) $A\in\mathscr{A}$；

(3) 若 $B\in\mathscr{A}$，则 B 关于 R^{n+1} 的任何 n 维子空间的对称 $B^*\in\mathscr{A}$。

(4) $\mathscr{A}$ 是满足(1)、(2)、(3)的最小子集。

由上面注 2 及 Zorn 引理知这样的$\mathscr{A}$存在。

下面研究$\mathscr{A}$的性质

引理 4.3.7 若 $B\in\mathscr{A}$，则

(1) $\mu(B)=\mu(A)$；

(2) $\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$。

注 这表明$\mathscr{A}$中集合的测度都与 A 的测度相等，且扰动后测度变小。□

证明 令 $\mathscr{B}=\{B\in\mathscr{M};\mu(B)=\mu(A),$

$$\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon),\forall\varepsilon>0\}.$$

显然，$A\in\mathscr{B}$。下面证明(a) $\mathscr{B}^*\subset\mathscr{B}$，(b) $\mathscr{B}$ 在$(\mathscr{M},\rho)$中闭，从而由$\mathscr{A}$的极小性知，$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，即定理结论成立。

(a) 设 $B\in\mathscr{B}$，则 $\mu(B)=\mu(A)$，$\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$，由命题 4.3.4 知，

$$\mu(B^*)=\mu(B)=\mu(A),$$

根据命题 4.3.5，

$$\mu((B^*)_\varepsilon)\leqslant\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon),\forall\varepsilon>0,$$

故 $B^*\in\mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}^*\subset\mathscr{B}$。

(b) 若 $B_n\in\mathscr{B}$，$B\in\mathscr{M}$，且 $\rho(B_n,B)\longrightarrow0$。

固定 $\varepsilon>0$，对每个 $\delta>0$，当 n 充分大时，有 $B\subset(B_n)_\delta$，从而 $B_\varepsilon\subset(B_n)_{\delta+\varepsilon}$，因此

$$\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu((B_n)_{\delta+\varepsilon})\leqslant\mu(A_{\delta+\varepsilon}),$$

故

$$\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_{\delta+\varepsilon}),\forall\delta>0.$$

易见 $\lim\limits_{\delta\to0}\mu(A_{\delta+\varepsilon})=\mu(A_\varepsilon)$，故 $\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon)$，

因此，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mu(B_\varepsilon)=\mu(B)\leqslant\mu(A)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mu(A_\varepsilon)$。

反之，固定 $\delta>0$，当 n 充分大时，有 $B_n\subset B_\delta$，故

$$\mu(A)=\mu(B_n)\leqslant\mu(B_\delta).$$

即

$$\mu(A)\leqslant\mu(B_\delta),\forall\delta>0,$$

$$\mu(A)\leqslant\lim_{\sigma\to0}\mu(B_\delta)=\mu(B),$$

因此，$\mu(A)=\mu(B)$，且 $\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$，即 $B\in\mathscr{B}$，因而$\mathscr{B}$在$(\mathscr{M},\rho)$中闭。证毕。

现在设 A 是 S^n 的闭子集，$\mu(A)=\alpha$，C 表示以 x_N 为中心的Cap，$\mu(C_\alpha)=\alpha$。

引理 4.3.8 令 $\Phi:\mathscr{A}\longrightarrow[0,1]$，

$$\Phi(B)=\mu(B\cap C_\alpha)\forall B\in\mathscr{A},$$

则 Φ 是$(\mathscr{A},\rho)$上的上半连续函数。

证明 令 $B_n,B\in\mathscr{A},\rho(B_n,B)\longrightarrow0$，要证

$$\overline{\lim_n}\Phi(B_n)=\overline{\lim_n}\mu(B_n\cap C_\alpha)\leqslant\mu(B\cap C_\alpha)=\Phi(B)。\tag{4.6}$$

任取固定 $\delta>0$，当 n 充分大时，有 $B_n\subset B_\delta$，因而当 n 充分大时，

$$B_n\cap C_\alpha\subset(B\cap(C_\alpha)_\delta)_\delta 。$$

故
$$\overline{\lim_n}\mu(B_n\cap C_\alpha)\leqslant\mu((B\cap(C_\alpha)_\delta)_\delta),\forall\delta>0。$$

但
$$\bigcap_{\delta>0}(B\cap(C_\alpha)_\delta)_\delta=B\cap C_\alpha,\text{故}$$

$$\overline{\lim_n}\mu(B_n\cap C_\alpha)\leqslant\mu(B\cap C_\alpha)。$$

证毕。

定理 4.3.6 的证明 任取闭集 $A\subset S^n$，$\mu(A)=\alpha$，令 C_α 是中心在 x_N 的一个 Cap，$\mu(C_\alpha)=\alpha$。

由于 $(\mathscr{A},\rho)$ 是紧度量空间，根据引理4.3.8，$\Phi(B)=\mu(B\cap C_\alpha)$是$(\mathscr{A},\rho)$上的上半连续函数，故 Φ 必在某个 $B\in\mathscr{A}$ 达到最大值。

我们将证明

$$C_\alpha\subset B\tag{4.7}$$

如果(4.7)式成立，因 $B\in\mathscr{A}$，故

$$\mu(A)=\mu(A)=\mu(C_\alpha)=\alpha,\text{且}$$

$$\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon),\forall\varepsilon>0。$$

由(4.7)式知，$\mu((C_\alpha)_\varepsilon)\leqslant\mu(B_\varepsilon)\leqslant\mu(A_\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$，由 A 的任意性

知，C_α 即为等周不等式的一个解。

下面证明(4.7)式。反证法，若 $C_\alpha \not\subset B$，下面将找 B 的某个对称 B^*，使 $\Phi(B) < \Phi(B^*)$，这与 B 的极大性矛盾。

因 C_α 与 B 是闭集，故 $C_\alpha \not\subset B$ 表明 $\mu(B \setminus C_\alpha) > 0$，又因

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(C_\alpha)，且$$

$$\mu(B) = \mu(B \setminus C_\alpha) + \mu(B \cap C_\alpha),$$

$$\mu(C_\alpha) = \mu(C_\alpha \setminus B) + \mu(B \cap C_\alpha),$$

故 $\mu(B \setminus C_\alpha) = \mu(C_\alpha \setminus B) > 0$，因此，可找到 $x \in B \setminus C_\alpha, y \in C_\alpha \setminus B$，使得

(1) 存在 R^{n+1} 的 n 维子空间 H，使 $x - y$ 与 H 正交；

(2) $S^n = (S^n)_+ \cup H \cup (S^n)_-$ 是由 H 决定的 S^n 的一个满等距对合映象 σ_H（即垂直反射）的有效分解，使 $x_N \in (S^n)_+, x = \sigma_H(y)$；

(3) 存在 $\delta > 0$，使以 x 为中心、半径为 δ 的 Cap $C_{(x,\delta)}$ 几乎含于 $B \setminus C_\alpha$ 中，以 y 为中心、半径为 δ 的 Cap $C_{(y,\delta)}$ 几乎含于 $C_\alpha \setminus B$ 中。

由于 $y \in C_\alpha, x \in C_\alpha$，故 $d(y, x_N) \leqslant d(x, x_N)$，因为由 σ_H 决定的分解是有效的，根据性质 4.3.2 知，$y \in (S^n)_+$，$x \in (S^n)_-$，且注意，$\sigma_H(C_{(x,\delta)}) = C_{(y,\delta)}$。

由定义 4.3.2 的注 3 知，$C_\alpha(C_\alpha)^*$，再由定义 4.3.2 的注 2 知，

$$(B \cap C_\alpha)^* \subset B^* \cap C_\alpha^* = B^* \cap C_\alpha,$$

由命题 4.3.4 知，

$$\mu(B^* \cap C_\alpha) \geqslant \mu((B \cap C_\alpha)^*) = \mu(B \cap C_\alpha).$$

容易看到，

$$C_{(y,\delta)} \overset{a.e}{\subset} (B^* \cap C_\alpha) \setminus (B \cap C_\alpha)$$

故

$$\Phi(B) = \mu(B \cap C_\alpha) < \mu(B^* \cap C_\alpha) = \Phi(B^*),$$

矛盾！证毕。

注　上述证明表明等周不等式的唯一闭解是形为 Cap 的闭集。□

推论 4.3.7　如果 $A\subset S^n$, $\mu(A)\geqslant\frac{1}{2}$,则对 $\varepsilon>0$,

$$\mu(A_\varepsilon)\geqslant 1-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}\qquad(\text{其中 } n\geqslant 2).$$

证明　由定理 4.3.6 知，只须计算 $\mu(C_\varepsilon)$ 即可，其中 C 是上半球面。

显然，$C_\varepsilon=\left\{x\in S^n; d(x,x_N)\leqslant\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right\}$,其中 x_N 为北极,d 为测地线距离。

容易看到，

$$\mu(C_\varepsilon)=\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon}\cos^{n-1}\theta d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta d\theta}.$$

令 $I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k\theta d\theta$,由分部积分知 $kI_k=(k-1)I_{k-2}$,故

$$\sqrt{k}\,I_k\geqslant\sqrt{k-2}\,I_{k-2},$$

归纳得到

$$\sqrt{k}\,I_k\geqslant\min(I_1,\ \sqrt{2}\,I_2)=\min\left(1,\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

另一方面，显然有，当 $0<r<\frac{\pi}{2}$时,$\cos r\leqslant e^{-\frac{r^2}{2}}$,故

$$1-\mu(C_\varepsilon)=\frac{\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta d\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{n-1}}\int_{\varepsilon\sqrt{n-1}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n-1}}\cos^{n-1}\frac{r}{\sqrt{n-1}}dr}{2I_{n-1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\sqrt{n-1}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n-1}} \cos^{n-1}\frac{r}{\sqrt{n-1}}\,dr \leqslant \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\sqrt{n-1}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n-1}} e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

$$\leqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}\int_0^{(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\sqrt{n-1}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}.$$

从而
$$\mu(C_\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}.$$

证毕。

三、Levy 平均

为了应用 S^n 的等周不等式来证明 Dvoretsky 定理，我们需要观察 S^n 上连续函数的值域的"集中现象".Levy 平均是一个强有力的工具。

定义 4.3.3 设 $f: S^n \longrightarrow R^1$ 是连续函数，称数 M_f 是 f 的 Levy 平均，如果

$$\mu(x; f(x) \geqslant M_f) \geqslant \frac{1}{2},$$

且

$$\mu(x; f(x) \leqslant M_f) \geqslant \frac{1}{2}.$$

注 定义中的 μ 是 S^n 的"球面面积测度"即 S^n 上唯一的正规化 Haar 测度。□

定理 4.3.8 设 $f: S^n \longrightarrow R^1$ 是具 Lipschitz 常数 $b>0$ 的 Lipschitz 函数(记为 $f \in \mathrm{Lip}(S^n, b)$)，则对任 $\varepsilon>0$，有

$$\mu(x \in S^n; |f(x) - M_f| \leqslant b\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}.$$

证明 任取 $\varepsilon>0$，令

$$A = \{x; f(x) \geqslant M_f\}, B = \{x; f(x) \leqslant M_f\}.$$

则

$$A_\varepsilon \subset \{x; f(x) \geqslant M_f - b\varepsilon\};$$

$$B_\varepsilon \subset \{x; f(x) \leqslant M_f + b\varepsilon\}.$$

事实上，若 $y \in A_\varepsilon$，则存在 $x \in A$，使 $d(x,y) \leqslant \varepsilon$，从而

$$|f(x) - f(y)| \leqslant bd(x,y) \leqslant b\varepsilon, \text{故}$$

$$f(y) \geqslant f(x) - b\varepsilon \geqslant M_f - b\varepsilon, \text{即}$$

$$A_\varepsilon \subset \{x; f(x) \geqslant M_f - b\varepsilon\}.$$

关于 B_ε 也可类似证明。

因此，

$$\mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu(x \in S^n;\ |f(x) - M_f| \leqslant b\varepsilon\}.$$

又因 为 $\mu(A) \geqslant \frac{1}{2}$，$\mu(B) \geqslant \frac{1}{2}$，应用等周不等式(推论 4.3.7)，有

$$\mu(A_\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2},$$

$$\mu(B_\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}.$$

因此，

$$\mu(S^n \backslash A_\varepsilon) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2},$$

$$\mu(S^n \backslash B_\varepsilon) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2},$$

从而，

$$\mu(S^n \backslash (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2},$$

最后得

$$\begin{aligned} &\mu(x \in S^n; |f(x) - M_f| \leqslant b\varepsilon) \\ &\geqslant \mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \\ &\geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

证毕。

定理 4.3.9(Levy 定理)　设 f 是 S^n 上连续函数，即 $f \in C(S^n)$，$A = \{x; f(x) = M_f\}$，则对任 $\varepsilon > 0$，

$$\mu(A_\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}.$$

证明　首先，我们证明

$$A_\varepsilon=(x;f(x)\leqslant M_f)_\varepsilon\cap(x;f(x)\geqslant M_f)_\varepsilon.$$

事实上，显然 $A_\varepsilon\subset(x;f(x)\leqslant M_f)_\varepsilon\cap(x;f(x)\geqslant M_f)_\varepsilon$，另一方面，若 $y\in(x;f(x)\leqslant M_f)_\varepsilon\cap(x;f(x)\geqslant M_f)_\varepsilon$，利用球面上 Cap 的连通性及函数 f 的连续性，易见存在 $x_0\in S^n$，使

$$f(x_0)=M_f\text{ 且 }d(x_0,y)\leqslant\varepsilon.$$

这表明 $y\in A_\varepsilon$，即

$$A_\varepsilon=(x;f(x)\leqslant M_f)_\varepsilon\cap(x;f(x)\geqslant M_f)_\varepsilon,$$

应用等周不等式，与定理 4.3.8 的证明相同，易知

$$\mu(A_\varepsilon)=\mu((x;f(x)\leqslant M_f)_\varepsilon\cap(x;f(x)\geqslant M_f)_\varepsilon)$$
$$\geqslant1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{n-1}{2}\varepsilon^2}.$$

证毕。

注　这个定理表明，S^n 上连续函数 f"几乎"取常数值。事实上，对任意小的 $\delta>0$，选充分小 $\varepsilon>0$，使 $\omega(f,\varepsilon)\leqslant\delta$，其中

$$\omega(f,\varepsilon)=\sup\{|f(x)-f(y)|;d(x,y)\leqslant\varepsilon\}.$$

从而当 $x\in A_\varepsilon$（其中 $A=\{x;f(x)=M_f\}$）时，$|f(x)-M_f|\leqslant\delta$，但当 ε 充分小时，$\mu(A_\varepsilon)$ 接近于 1。这表明在球面 S^n 上 f"几乎"是常数。这种现象称为"测度集中"现象，它是由等周不等式利用 Levy 平均这个概念揭示的。

但是 f 的 Levy 平均一般很难求出（也未必是唯一的），而 f 的期望 $Ef=\int_{S^n}fd\mu$ 却往往可计算。下面，我们再估计这两个数之间的误差。□

定理 4.3.10　存在一个绝对常数 C，使得如果 $f\in\mathrm{Lip}(S^{n-1},b)$，$b\leqslant\sqrt{n}$，则

$$\left|M_f-\int_{S^{n-1}}fd\mu\right|\leqslant C,\ (n\geqslant3).$$

证明　令

$$A_m=\{x;|f(x)-M_f|>m\}=\left\{x;|f(x)-M_f|>b\frac{m}{b}\right\},$$

由定理 4.3.8 知，对 $m>0$，

$$\mu(A_m^c)\geqslant 1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{n-2}{2}\frac{m^2}{b^2}},$$

故

$$\mu(A_m)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{n-2}{2}\times\frac{m^2}{b^2}}\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{m^2}{2}\times\frac{n-2}{n}}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{m^2}{8}}\ (n\geqslant 3).$$

且在 $A\backslash A_{m+1}$ 上 $|f(x)-M_f|\leqslant m+1$，因此，

$$\left|M_f-\int_{S^{n-1}}f\,d\mu\right|\leqslant\int_{S^{n-1}}|f(x)-M_f|\,d\mu$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\int_{A_m\backslash A_{m+1}}|f(x)-M_f|\,d\mu$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)e^{-\frac{m^2}{8}}.$$

令 $C=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)e^{-\frac{m^2}{8}}$ 即可。证毕。

四、正交群与 δ 分离子集

设 O_n 是 R^n 上一切正交变换组成的群。显然，O_n 是紧群。从而存在 O_n 上唯一的 Haar 概率测度 ν（我们知道，O_n 上的 Haar 测度 η 是 O_n 上的测度，它在平移下不变，即

$$\eta(A)=\eta(U\cdot A)=\eta(A\cdot U),$$

其中 $U\in O_n$，A 是 O_n 中 Borel 子集，$U\cdot A=\{UV;\ V\in A\}$，$A\cdot U=\{V\cdot U;V\in A\}$）。

容易看到，S^{n-1} 上的测度 η 为 Haar 测度的充要条件是 η 在 $T\in O_n$ 下不变，即

$$\eta(A)=\eta(T(A));\ \forall\text{Borel 集 }A\subset S^{n-1},T\in O_n.$$

前面引入的 S^{n-1} 上正规化"球面面积"测度就是 S^{n-1} 上唯一的 Haar 概率测度。由这种唯一性，我们有

定理 4.3.11 对任何 Borel 集 $A\subset S^{n-1}$，$x\in S^{n-1}$，有

$$\mu(A)=\gamma(U\in O_n;Ux\in A).$$

证明　对每个固定的 $x\in S^{n-1}$，令

$$\eta_x(A)=\gamma(U\in O_n;Ux\in A),\ \forall \text{Borel 集 } A\subset S^{n-1}.$$

根据 S^{n-1} 上 Haar 概率测度的唯一性，及前面说明，我们只须证明 $\eta_x(\cdot)$是 S^{n-1} 上在正交变换 $U\in O_n$ 下不变的概率测度即可。

显然，$\eta_x(\cdot)$是概率测度。

任取 Borel 集 $A\subset S^{n-1}$，$U_0\in O_n$，则

$$\begin{aligned}\eta_x(U_0(A))&=\gamma(U\in O_n;U(x)\in U_0(A))\\&=\gamma(U_0(U\in O_n;U(x)\in A))\\&=\gamma(U\in O_n;Ux\in A)\\&=\eta_x(A).\end{aligned}$$

证毕。

下面证明中另一个主要工具是估计 k 维 Banach 空间单位球面的 δ 分离子集的元素个数。

定义 4.3.4　$\{x_n\}\subset$Banach 空间$(X,\|\cdot\|)$，若

$$\operatorname{sep}\{x_n\}=\inf\{\|x_n-x_m\|;n\neq m\}>\delta,$$

则称$\{x_n\}$为 X 的 δ 分离子集。

引理 4.3.12　令 X 是 k 维 Banach 空间，$0<\delta<1$，则 $S(X)$ 中存在一个 δ 网 W，使W 的基数 $\operatorname{Card}W\leqslant\left(1+\frac{3}{\delta}\right)<e^{k\log\frac{3}{\delta}}$.

证明　令$\{x_i\}_{i=1}^n$ 是 $S(X)$中最大 δ 分离子集，则$\{x_i\}_{i=1}^n$ 是 $S(X)$的一个 δ 网，$\left\{B\left(x_i,\dfrac{\delta}{2}\right)\right\}_{i=1}^n$两两不相交，且

$$\bigcup_{i=1}^n B\left(x_i,\frac{\delta}{2}\right)\subset\left(1+\frac{\delta}{2}\right)U(X).$$

由于这些球是"相似形"(即可通过平移，数乘后合同)。因而，它们的 Euclid 体积之比是半径的 k 次方之比，故有

$$n\left(\frac{\delta}{2}\right)^k\leqslant\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^k,$$

从而 $$n\leqslant\left(\frac{2}{\delta}+1\right)^k<e^{k\log\frac{3}{\delta}}.$$ 证毕。

五、Dvoretsky 定理的证明

1948 年 John 给出了 Banach 空间理论中最早的一个定量估计定理。

我们已经知道，若 X、Y 是两个线性同胚的 Banach 空间（即 $X\approx Y$），则

$$d(X,Y)=\inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\|;T:X\longrightarrow Y \text{ 线性同胚}\}$$

是 X,Y 的 Banach-Mazur 距离。

众所周知，一切 n 维 Banach 空间都是线性同胚的。特别地，它们都与 $l_2^n=\left\{(x_i)_{i=1}^n;\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_2=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}\right\}$线性同胚。那么，如何估计 n 维 Banach 空间之间的 Banach-Mazur 距离呢？John 定理是一个十分重要的定理。

定理 4.3.13 对每个 n 维 Banach 空间 X，有

$$d(X,l_2^n)\leqslant\sqrt{n}.$$

证明 将 X 看作 $(R^n,\|\cdot\|_X)$（在选择一组基之后）。

X 的单位球 $U(X)$ 是 R^n 中以原点为中心的有界均衡闭凸体（即内点非空），令 E 是 $U(X)$ 中（Euclid）体积最大的椭圆。

我们将证明

$$U(X)\subset\sqrt{n}E. \tag{4.8}$$

如果(4.8)式成立，则

$$(\sqrt{n})^{-1}|x|_E\leqslant\|x\|\leqslant|x|_E,\ \forall x\in X,$$

其中$|\cdot|_E$ 表示由 E 的 Minkowski 泛函决定的一个范数（它是一个由内积导出的范数）。易见，$l_2^n\cong(R^n,|\cdot|_E)$。

从而 $$d(X,l_2^n)=d(X,(R^n,|\cdot|_E))\leqslant\sqrt{n}.$$

为了证明(4.8)式，适当选择 R^n 的坐标轴（即选关于$|\cdot|_E$ 的正规化正交基$(u_i)_{i=1}^n$，则任 $x\in R^n$，有

$$x=\sum_{i=1}^n a_iu_i,\ |\cdot|_E=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}),$$

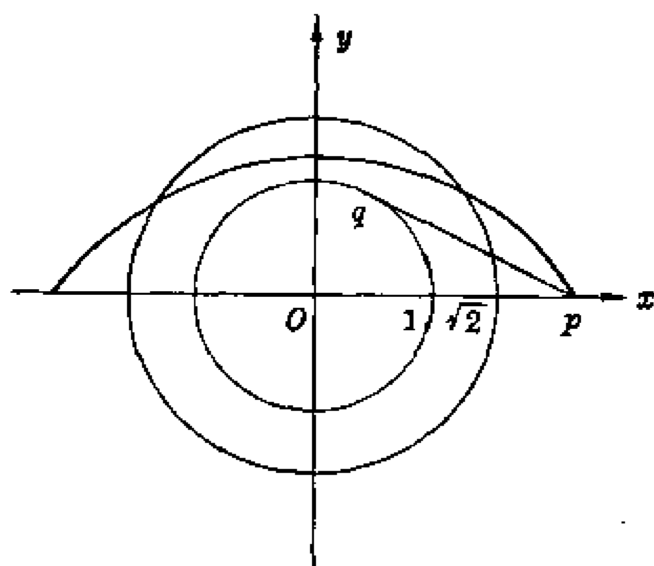
可假设 E 是标准 Euclid 球，即

$$E=\left\{x=(a_i)_{i=1}^n\in R^n;\ \sum_{i=1}^n a_i^2\leqslant 1\right\}.$$

下面将对 $n=2$ 情况证明，对 $n>2$ 可类似地进行。

假设 $U(X)\not\subset\sqrt{2}E$，则存在 $p\in U(X)\setminus\sqrt{2}E$，通过旋转坐标轴，可假设 $p=(\alpha,0)$，其中 $\alpha>\sqrt{2}$（见图）。

由于 $U(X)$ 是均衡凸集，故 $C\equiv c_0(\pm p,E)\subset U(X)$。



过 p 作圆 E 的切线，设第一象限的切点为 q。

由于 $\alpha>\sqrt{2}$，故 $q=(\beta+\delta,\beta)$ 对某个 $\delta>0$。

对于充分小 $\varepsilon>0$，令

$$E_\varepsilon=\left\{(x,y);\ \frac{x^2}{(1+\varepsilon)^2}+(1+\varepsilon)^2y^2\leqslant 1\right\}.$$

则 E_ε 是一个椭圆，$\mathrm{Vol}(E_\varepsilon)=\pi=\mathrm{Vol}(E)$。

当 ε 充分小时，E_ε 与 C 的边界不相交，故存在 $\lambda>1$，使

$$\lambda E_\varepsilon\subset C\subset U(X).\ \text{但}$$

$$\mathrm{Vol}(\lambda E_\varepsilon)=\lambda\mathrm{Vol}(E_\varepsilon)=\lambda\mathrm{Vol}(E)>\mathrm{Vol}(E).$$

这与 E 的极大性矛盾！证毕。

注 1　由于 $d(\cdot,\cdot)$ 满足

$$d(X,Y)\leqslant d(X,Z)d(Z,Y),$$

因此，由这个定理得到，对任何两个 n 维 Banach 空间 X,Y，有 $d(X,Y)\leqslant n$。□

注 2　也容易证明 $d(l_1^n, l_2^n)=d(l_\infty^n, l_2^n)=\sqrt{n}$。事实上，V. Gurarii, M. Kadec & V. Macaev(G-K-M-1)证明

$$d(l_p^n,l_q^n)\leqslant\begin{cases}C_{p,q}n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|} & \text{当 } 1\leqslant p,q\leqslant 2, \text{或 } 2\leqslant p,q\leqslant+\infty \text{ 时}\\ C_{p,q}\max\left(n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|},n^{\left|\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right|}\right) & \text{当 } 1\leqslant p\leqslant 2\leqslant q \text{ 时}\end{cases}$$

其中 $C_{p,q}$ 是不依赖于 n 的常数。□

更进一步，我们还有

定理 4.3.14(Dvoretsky-Rogers)　设 $X=(R^n,\|\cdot\|)$是n维 Banach 空间。令 D 为 $U(X)$中最大(Euclid)体积的椭圆，则存在关于由 D 导出的 Euclid 范数$|\cdot|_d$ 的正规化正交基$(u_i)_{i=1}^n$，使

$$2^{-\frac{n-1}{n-i}}\leqslant\|u_i\|\leqslant 1,\ i=1,\cdots,n-1。$$

证明　归纳选取$(u_i)_{i=1}^n$，

先选 $u_1\in R^n$，使$|u_1|_D=1=\|u_1\|$（注意，此时，对任 $x\in R^n$，$|x|_D=1$，有$\|x\|\leqslant\|u_1\|$)。

假设 $u_1,\cdots,u_i$ 已选好，我们再选 u_{i+1}，使

$$\langle u_{i+1},u_j\rangle_D=0,j=1,\cdots,i。$$

$|u_{i+1}|_D\leqslant 1$，若对任何 $x\in R^n$，满足$\langle x,u_j\rangle_D=0,1\leqslant j\leqslant i$，$|x|_D\leqslant 1$，则$\|x\|\leqslant\|u_{i+1}\|$(其中$\langle\cdot,\cdot\rangle_D$是由$|\cdot|_D$导出的内积)，易证，

$$|u_{i+1}|_D=1。$$

如上选法，我们得到关于$|\cdot|_D$的规范化正交基$(u_i)_{i=1}^n$

首先，我们注意，对任 $x\in\operatorname{span}\{u_j\}_{j=i}^n$，$\langle x,u_j\rangle_D=0$。

$$1\leqslant j\leqslant i-1,|x|_D\leqslant 1,\text{有}\|x\|\leqslant\|u_i\|。\tag{4.9}$$

考虑如下椭圆：

$$B_{ab}=\left\{\sum_{j=1}^n x_ju_j;\quad \frac{1}{a^2}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_j^2\right)+\frac{1}{b^2}\left(\sum_{j=i}^n x_j^2\right)\leqslant 1\right\}。$$

任取$\sum_{j=1}^{n} x_j u_j \in B_{ab}$，则

$$\left| \sum_{j=1}^{i-1} x_j u_j \right|_D = \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} x_j^2} \leqslant a,$$

故$\left| \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{i-1} x_j u_j \right|_D \leqslant 1$，由于 $D \subset U(X)$，故

$$\left\| \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{i-1} x_j u_j \right\| \leqslant \left| \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{i-1} x_j u_j \right|_D \leqslant 1.$$

另一方面，$\left| \sum_{j=i}^{n} x_j u_j \right|_D = \sqrt{\sum_{j=i}^{n} x_j^2} \leqslant b$，故

$$\left| \frac{1}{b} \sum_{j=i}^{n} x_j u_j \right|_D \leqslant 1, \text{且}$$

$$\frac{1}{b} \sum_{j=i}^{n} x_j u_j \in \operatorname{span}\{u_j\}_{j=i}^{n},$$

由(4.9)式知

$$\left\| \frac{1}{b} \sum_{j=i}^{n} x_j u_j \right\| \leqslant \|u_i\|,$$

特别地，对 $B_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|u_i\|}}$ 应用上述结论知，对任$\sum_{j=1}^{n} x_j u_j \in B_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|u_i\|}}$，有

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right\| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{i-1} x_j u_j \right\| + \left\| \sum_{j=i}^{n} x_j u_j \right\| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

故

$$B_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|u_i\|}} \subset U(X), i = 1, \cdots, n,$$

易见

$$\operatorname{Vol}(B_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|u_i\|}}) = 2^{-(i-1)}(2\|u_i\|)^{-(n-i)} \operatorname{Vol}(D)$$

由 D 的极大性知，

$$2^{-(n-1)}\|u_i\|^{-(n-i)} \leqslant 1, \text{则}$$

$$2^{-\frac{n-1}{n-i}} \leqslant \|u_i\|, 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

证毕。

下面的证明就是选取 n 维 Banach 空间的一个 k 维子空间

E_k，使 $d(E_k, l_2^k) \leqslant 1+\varepsilon$（即选取最大可能的 k，使得 $d(E_k, l_2^k) \leqslant 1+\varepsilon$）。这要巧妙地用到范数$\|\cdot\|$这个函数取值的高度集中——集中在它的 Levy 平均周围，这一想法，我们先从分析范数$\|\cdot\|$的期望值与它的 Levy 平均之间关系着手。

定理 4.3.15 若 $X=(R^n, \|\cdot\|)$是 n 维 Banach 空间，$|\cdot|$是 R^n 上一个 Euclid 范数（内积范数），使

$$a^{-1}|x| \leqslant \|x\| \leqslant b|x|, \forall x \in X,$$

(1) 若 $b \leqslant \sqrt{n}$，则

$$|A_r - M_r| < C,$$

其中$A_r = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu_{n-1}, r(x) = \|x\|, S^{n-1} = \{x \in R^n, |x| = 1\}$，$\mu_{n-1}$ 是 S^{n-1} 上正规化"球面面积"测度。M_r 为 $r(x)$的 Levy 平均（在下文，不作特别声明，均理解为这样的定义）。C 为不依赖于 n、X、及$|\cdot|$的一个绝对常数。

(2) 若$ab \leqslant \sqrt{n}$，则

$$\frac{1}{2} \leqslant M_r^{-1} A_r \leqslant C.$$

证明 (1) 令 $A = \{x \in S^{n-1}; r(x) = M_r\}$，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$A_\varepsilon \subset \{x \in S^{n-1}; |\|x\| - M_r| \leqslant b\varepsilon\} \tag{4.10}$$

其中 $A_\varepsilon = \{y \in S^{n-1}; d(A, y) \leqslant \varepsilon\}$。

事实上，若 $x \in A_\varepsilon$，则存在 $y \in A$，使 $d(x,y) \leqslant \varepsilon$，其中 $d(\cdot,\cdot)$为 S^{n-1} 上的测地线距离)，故

$$\begin{aligned} |\|x\| - M_r| &= |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\| \leqslant b|x-y| \\ &\leqslant bd(x,y) \leqslant b\varepsilon. \end{aligned}$$

则(4.10)式成立。

由 Levy 定理（定理 4.3.9）有

$$\mu_{n-1}(A_\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}(n-2)}$$

从而

$$\mu_{n-1}(x\in S^{n-1};\ |\,\|x\|-M_r|>b\varepsilon)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}(n-2)},$$

因此，对 $t>0$,

$$\mu_{n-1}(x\in S^{n-1};\ |\,\|x\|-M_r|>t)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{t^2}{2b^2}(n-2)}.$$

当$\sqrt{n}\geqslant b$ 时，

$$\mu_{n-1}(x\in S^{n-1};\ |\,\|x\|-M_r|>t)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,2^{-\frac{t^2}{2}\frac{n-2}{n}}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{1}{4}}\ (n\geqslant 3).$$

因为任何概率测度 μ，有

$$\int_\Omega f\,d\mu=\int_0^\infty\mu(f>t)\,dt,$$

其中 $f\geqslant 0$，故

$$|A_r-M_r|=\left|\int_{S^{n-1}}\|x\|\,d\mu_{n-1}-M_r\right|$$

$$\leqslant\int_{S^{n-1}}|\,\|x\|-M_r|\,d\mu_{n-1}=\int_0^\infty\mu(|\,\|x\|-M_r|>t)\,dt$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{4}}dt=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\ (n\geqslant 3).$$

$\left(\text{上式用到}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$，令 $C=\pi$ 即可。证毕。

(2) 首先，

$$A_r=\int_{S^{n-1}}\|x\|\,d\mu_{n-1}\geqslant\int_{(\|x\|\geqslant M_r)}\|x\|\,d\mu_{n-1}$$

$$\geqslant M_r\mu_{n-1}(\|x\|\geqslant M_r)\geqslant\frac{1}{2}M_r.$$

由 $a^{-1}|x|\leqslant\|x\|\leqslant b|x|$，知$|x|\leqslant a\|x\|\leqslant ab|x|$，将(1)的结论应用于 $a\|\cdot\|$，考虑到 $A_{ar}=aA_r$, aM_r 是 $ar(x)$的一个 Levy 平均，且 $ar(x)$的 Levy 平均 Mar 均有 Mar$\geqslant 1$，故

$$|aA_r-aM_r|=|A_{ar}-M_{ar}|\leqslant\pi\leqslant\pi aM_r,$$

即 $|A_r - M_r| \leqslant \pi M_r$，从而 $A_r \leqslant (\pi+1)M_r$，于是

$$\frac{1}{2}M_r \leqslant A_r \leqslant (\pi+1)M_r.$$

证毕。

注 (1)的证明也可直接由定理 4.3.10 得出。□

引理 4.3.16 设 $f\in C(S^{n-1})$，$(n\geqslant 3)$，则

对于任何 $W\subset S^{n-1}$，$\operatorname{Card} W<\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\varepsilon^2\frac{n-2}{2}}$，必存在 $T\in O_n$，

使 (1) $TW\subset A_\varepsilon$，

(2) 当 $x\in TW$ 时，$|f(x)-M_f|<\omega_f(\varepsilon)$，

其中，$A=\{x\in S^{n-1}; f(x)=M_f\}$，$\omega_f(\varepsilon)=\sup\{|f(x)-f(y)|;$
$d(x,y)\leqslant\varepsilon, x,y\in S^{n-1}\}$。

证明 设 γ 是 O_n 上唯一的 Haar 概率测度，由定理 4.3.11 及定理 4.3.9 知，

$$\gamma(T\in O_n; Tx\in A_\varepsilon)=\mu_{n-1}(A_\varepsilon)\geqslant 1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}(n-2)},$$

故

$$\gamma(T\in O_n; Tx\in A_\varepsilon, x\in W)$$
$$\geqslant 1-(\operatorname{Card} W)\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}(n-2)}>0.$$

因而存在 $T\in O_n$，使得对 $\forall x\in W$，有 $Tx\in A_\varepsilon$，即 $TW\subset A_\varepsilon$。

当 $x\in A_\varepsilon$ 时，由 A_ε 定义知，存在 $y\in A$，使 $d(x,y)\leqslant\varepsilon$，从而

$$|f(x)-M_f|=|f(x)-|f(y)|\leqslant\omega_f(\varepsilon).$$

因此，特别地，当 $x\in TW(\subset A_\varepsilon)$ 时，有

$$|f(x)-M_f|\leqslant\omega_f(\varepsilon).$$

证毕。

定理 4.3.17 对每个 $\varepsilon>0, 0<\theta<1$，及正整数 n，令

$$k(\varepsilon,\theta,n)=\left[\frac{\varepsilon^2(n-2)}{2\log\frac{8}{\theta}}\right],$$

则对每个 $f\in C(S^{n-1})$，存在 R^n 的子空间 E_k，使

$$\dim E_k = k \geqslant k(\varepsilon,\theta,n),$$

及 $S^{n-1}\cap E_k$ 的一个 θ 网 W_k，使

(1) $|f(x)-M_f|\leqslant\omega_f(\varepsilon),\ \forall x\in W_k$；

(2) $|f(x)-M_f|\leqslant\omega_f(\varepsilon)+\omega_f(\theta),\ \forall x\in S^{n-1}\cap E_k$。

证明(1) 任取 $f\in C(S^{n-1})$，由引理 4.3.12 知，对 R^n 的 k 维子空间 E_k'，存在 $S^{n-1}\cap E_k'$ 的一个 θ 网 W_k，使

$$\text{Card } W_k \leqslant \left(1+\frac{2}{\theta}\right)^k \leqslant e^{k\log\frac{3}{\theta}}.$$

为了应用引理 4.3.16，可取 k 充分大，但必须

$$e^{k\log\frac{3}{\theta}} < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{n-2}{2}\varepsilon^2}.$$

易见，存在$k\geqslant\left[\dfrac{\varepsilon^2(n-2)}{2\log\dfrac{8}{\theta}}\right]=k(\Sigma,\theta,n)$满足上述要求。

应用引理 4.3.16，存在 $T\in O_n$，使得当 $x\in TW_k$ 时，有

$$|f(x)-M_f|\leqslant\omega_f(\varepsilon).$$

令 $E_k=TE_k'$，则 E_k 是 R^n 的 k 维子空间，TW_k 是 $E_k\cap S^{n-1}$ 的 θ 网。证毕。

(2) 任取 $x\in E_k\cap S^{n-1}$，则存在 $x_0\in TW_k$，使 $d(x,x_0)\leqslant\theta$，从而

$$\begin{aligned}|f(x)-M_f| &\leqslant |f(x_0)-M_f| + |f(x_0)-f(x)| \\ &\leqslant \omega_f(\theta)+\omega_f(\varepsilon).\end{aligned}$$

证毕。

定理 4.3.18 设 $X=(R^n,\|\cdot\|)$是 n 维 Banach 空间，$|\cdot|$是 R^n 上一个 Euclid 范数。使得

$$a^{-1}|x|\leqslant\|x\|\leqslant b|x|,\qquad \forall x\in X,$$

记 $r(x)=\|x\|,\forall x\in X$，设 E 是 R^n 的子空间，W 是 $E\cap S^{n-1}$ 的一个 θ 网，若对某个 $\varepsilon>0$，

$$|r(x)-M_r|\leqslant b\varepsilon,\ \forall x\in W,$$

则

$$\frac{1-2\theta}{1-\theta}M_r-\frac{b\varepsilon}{1-\theta}\leqslant\|x\|=r\ (x)\leqslant\frac{1}{1-\theta}M_r+\frac{b\varepsilon}{1-\theta},$$

$$\forall x\in E\cap S^{n-1}.$$

证明　令 $x\in E\cap S^{n-1}$，则 $|x|=1$，由于 W 是 $E\cap S^{n-1}$ 的 θ 网，故存在 $y_1\in W$，使 $|x-y_1|\leqslant\theta$。

由于 $\frac{x-y_1}{|x-y_1|}\in E\cap S^{n-1}$，又有 $y_2\in W$，使

$$\left|\frac{x-y_1}{|x-y_1|}-y_2\right|\leqslant\theta,$$

从而

$$|x-y_1-|x-y_1|y_2|\leqslant\theta^2.$$

继续这个过程，存在 $(y_i)_{i=1}^{\infty}\subset W$，及 $(\delta_i)_{i=1}^{\infty}\subset R^1$，$|\delta_i|\leqslant\theta^{i-1}$，$\forall_i$，使

$$x=y_1+\sum_{i=2}^{\infty}\delta_i y_i\ .$$

由于 $y_i\in W$，故 $\|y_i\|\leqslant M_r+b\varepsilon$，故

$$\|x\|\leqslant\|y_1\|+\sum_{i=2}^{\infty}|\delta_i|\cdot\|y_i\|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\theta^i(M_r+b\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{1-\theta}(M_r+b\varepsilon). \tag{4.11}$$

另一方面，取 $y\in W$，使 $|x-y|\leqslant\theta$，则 $\frac{x-y}{|x-y|}\in S^{n-1}\cap E$，因此，由(4.11)式

$$\left\|\frac{x-y}{|x-y|}\right\|\leqslant\frac{1}{1-\theta}(M_r+b\varepsilon),$$

从而，$\|x-y\|\leqslant\frac{\theta}{1-\theta}(M_r+b\varepsilon)$，但 $y\in W$，故 $\|y\|>M_r-b\varepsilon$，因此，

$$\|x\|\geqslant\|y\|-\|x-y\|\geqslant M_r-b\varepsilon-\frac{\theta}{1+\theta}(M_r+b\varepsilon)$$

$$=\frac{1-2\theta}{1-\theta}M_r-\frac{1}{1-\theta}b\varepsilon.$$

即

$$\frac{1-2\theta}{1-\theta}M_r-\frac{1}{1-\theta}b\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant\frac{1}{1-\theta}M_r+\frac{b\varepsilon}{1-\theta}.$$

证毕。

定理 4.3.19 对任何 $\delta,0<\delta<1$，存在常数 $C(\delta)>0$，使得对任何 n 维 Banach 空间 $X=(R^n,\|\cdot\|)$，满足

$$a^{-1}|x|\leqslant\|x\|\leqslant b|x|,\forall x\in X,$$

其中$|\cdot|$是 R^n 上一个 Euclid 范数，存在 R^n 的一个 k 维子空间 E_k，使

(1) $\dim E_k=k>C(\delta)(n-2)\left(\frac{M_r}{b}\right)^2$；

(2) $(1-\delta)M_r|x|\leqslant\|x\|\leqslant(1+\delta)M_r|x|$，$\forall x\in E_k$，特别地，有

$$d(E_k,l_2^k)\leqslant\frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

注 1 $C(\delta)$是与 $n,(R^n,\|\cdot\|),(R^n,|\cdot|)$无关的常数，它仅依赖于 δ。□

注 2 在定理中取$|\!|\!|x|\!|\!|=M_r|x|$，$\forall x\in E_k$，则$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$是 E_k 上的 Euclid 范数，且

$$(1-\delta)|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant\|x\|\leqslant(1+\delta)|\!|\!|x|\!|\!|,\forall x\in E_k.$$

故 $d(E_k,l_2^k)\leqslant\frac{1+\delta}{1-\delta}$。范数$|\!|\!|\cdot|\!|\!|=M_r|\cdot|$的产生是由于$\|\cdot\|$的取值高度集中现象的结果，这里已经体现了 Dvoretsky 定理的主要想法。□

证明 令 $\theta=\frac{\delta}{4}$，则

$$\frac{1}{1-\theta}<1+\frac{\delta}{2},\qquad\frac{1-2\theta}{1-\theta}>1-\frac{\delta}{2},$$

$$\frac{1+\theta}{1-\theta}<1+\delta.$$

令$\varepsilon=\theta\frac{M_r}{b}=\frac{\delta}{4}\frac{M_r}{b}$，应用定理 4.3.17，存在 R^n 的 k 维子

空间 E_k，使

$$\dim E_k = k \geqslant \left[\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{n-2}{\log \frac{8}{\theta}}\right] = \left[\frac{\delta^2}{16} \cdot \frac{M_r^2}{b^2} \cdot \frac{(n-2)}{2\log \frac{32}{\delta^2}}\right]$$

$$\geqslant C(\delta) \frac{M_r^2(n-2)}{b^2}.$$

且存在 $E_k \cap S^{n-1}$ 的一个 $\frac{\delta}{4}$ 网 W_k，使

$$|\|x\| - M_r| \leqslant b\varepsilon, \forall x \in W_k.$$

由定理 4.3.18，

$$(1-\delta) M_r < \left(\frac{1-2\theta}{1-\theta} - \frac{\theta}{1-\theta}\right) M_r = \frac{1-2\theta}{1-\theta} M_r - \frac{b\varepsilon}{1-\theta}$$

$$\leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{1-\theta} M_r + \frac{b\varepsilon}{1-\theta} = \left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{\theta}{1-\theta}\right) M_r < (1+\delta) M_r,$$

证毕。

注意，由这个定理知，为了估计维数 k，只要估计 $\frac{M_r}{b}$ 即可。如果 $b=1$，则只要估计 M_r 即可。

引理 4.3.20 存在 $a_0>0$，使得当 $a \geqslant a_0$ 时，有

$$\int_a^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \geqslant \frac{1}{4\pi a} e^{-\pi a^2}.$$

证明 因为

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\int_a^{\infty} e^{-\pi t^2} dt}{(4\pi a)^{-1} e^{-\pi a^2}} = \lim_{a \to +\infty} \frac{-e^{-\pi a^2}}{-\frac{e^{-\pi a^2}}{4\pi a^2} - \frac{2\pi a}{4\pi a^2} e^{-\pi a^2}}$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 > 1. \text{ 证毕。}$$

引理 4.3.21 设 $0<\delta<\frac{1}{\pi}$，$0<\varepsilon<1$，则存在 $m_0 = m_0(\varepsilon, \delta)>0$ 时，有

$$\frac{1}{4\pi} (\delta \log m)^{-\frac{1}{2}} m^{-\pi\delta} > \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^{\frac{1}{m}}).$$

证明　只须证 $\lim\limits_{m\to+\infty} m^{\pi\delta}(\delta\log m)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon^{\frac{1}{m}})<\frac{1}{2\pi}$.

令 $\eta=1-\varepsilon$, 则 $1-\varepsilon^{\frac{1}{m}}=1-(1-\eta)^{\frac{1}{m}}<\frac{\eta}{m}$, 故

$$m^{\pi\delta}\delta^{\frac{1}{2}}(\log m)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon^{\frac{1}{m}})<m^{\pi\delta-1}\eta\,(\delta\log m)^{\frac{1}{2}},$$

但因 $\pi\delta<1$, 故

$$\lim_{m\to+\infty}\eta^{\pi\delta-1}(\delta\log m)^{\frac{1}{2}}=0, \text{故}$$

$$\lim_{m\to+\infty}m^{\pi\delta}(\delta\log m)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon^{\frac{1}{m}})=0<\frac{1}{2\pi}.$$

证毕.

定理 4.3.22　存在绝对常数 C,使得对任何 n, 及 R^n 中任何 Euclid 范数 $|\cdot|$, $1\leqslant m\leqslant n$, 有

$$\int_{S^{n-1}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|\,d\mu_{n-1}\geqslant C\left(\frac{\log m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明　取 $(u_i)_{i=1}^n$ 是 R^n 中关于 Euclid 范数 $|\cdot|$ 的正规化正交基, 则 $(R^n,|\cdot|)\cong l_2^n\equiv\left\{x=(x_i)_{i=1}^n\in R^n;\ \|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

令
$$S^{n-1}=\left\{x=(x_i)_{i=1}^n\in R^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^2=1\right\}.$$

令 G_n 是 R^n 中具密度函数 $\exp\left(-\pi\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)$ 的测度, 它是一个概率测度. 事实上,

$$G_n(R^n)=\int_{R^n}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\sqrt{2\pi}\,x_i)^2\right]dx_1\cdots dx_n$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n t_i^2\right]dt_1\cdots dt_n=1.$$

如前所述, 记 O^n 是 l_2^n 的正交变换群, 则 G_n 是在正交变换 $T\in O_n$ 作用下不变的(即对任何可积函数 f, 有

$$\int_{R^n}f(x)dG_n(x)=\int_{R^n}f(Tx)dG_n(x)).$$

任取 $f: S^{n-1} \longrightarrow R^1$ 的可积函数。令

$$\hat{f}(x) = |x| f\left(\frac{x}{|x|}\right), \forall x \in R^n \setminus \{0\},$$

即$\hat{f}$是 f 的齐次延拓，则$\int_{R^n} \hat{f}(x) dG_n(x)$ 在 $T \in O_n$ 作用下不变。

定义 S^{n-1} 上的测度 λ_{n-1}，使

$$\int_{S^{n-1}} f(x) d\lambda_{n-1}(x) \equiv \int_{R^n} \hat{f}(x) dG_n(x).$$

则正测度 λ_{n-1} 也在 $T \in O_n$ 作用下不变，事实上

$$\int_{S^{n-1}} f(Tx) d\lambda_{n-1}(x) = \int_{R^n} \widehat{f o T}(x) dG_n(x)$$

$$= \int_{R^n} |x| f o T\left(\frac{x}{|x|}\right) dG_n(x) = \int_{R^n} |Tx| f\left(\frac{Tx}{|Tx|}\right) dG_n(x)$$

$$= \int_{R^n} |x| f\left(\frac{x}{|x|}\right) dG_n(x) = \int_{R^n} \hat{f}(x) dG_n(x)$$

$$= \int_{S^{n-1}} f(x) d\lambda_{n-1}(x).$$

由 S^{n-1} 上 Haar 概率测度的唯一性知，存在 $\beta > 0$，使

$$\lambda_{n-1} = \beta \mu_{n-1},$$

其中 μ_{n-1} 是 S^{n-1} 上正规化"球面面积"测度。并且

$$\beta = \beta \int_{S^{n-1}} d\mu_{n-1}(x) = \int_{S^{n-1}} d\lambda_{n-1}(x)$$

$$= \int_{R^n} |x| dG_n(x) \leqslant \left(\int_{R^n} |x|^2 dG_n(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{R^n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \exp\left[-\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] dx_1 \cdots dx_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(n \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\pi t^2} dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(注 $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\pi t^2} dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} ds$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}).$$

即
$$\beta \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}\,.$$
从而，
$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|\, d\mu_{n-1}(x) \geqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|\, d\lambda_{n-1}(x)$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{R^n} |x| \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\frac{x_i}{|x|}\right| dG_n(x)$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{R^n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|\, dG_n(x)\,.$$
下面只要估计
$$\int_{R^n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|\, dG_n(x) \geqslant C\sqrt{\log m}\,, \tag{4.12}$$
对某个绝对常数 C。

对任何 $\alpha>0$，
$$G_n(\max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| < \alpha) = \overbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cdots\int_{-\alpha}^{\alpha}}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\pi\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) dx_1\cdots dx_n$$
$$= \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\pi t^2} dt\right)^m = \left(1 - 2\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt\right)^m.$$
由引理 4.3.20 及引理 4.3.21，选 m_0，使当 $m\geqslant m_0$ 时，有
$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{\pi}{4}} > \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{m}}\right),$$
$$\int_{\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt \geqslant \frac{1}{4\pi\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\pi\left(\frac{1}{4}\log m\right)}$$
$$= \frac{1}{4\pi\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{\frac{1}{2}}} m^{-\frac{\pi}{4}},$$
因此，当 $m\geqslant m_0$ 时，有
$$\int_{\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt \geqslant \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{m}}\right).$$

所以，当 $m_0\leqslant m\leqslant n$ 时，有

$$G_n\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|<\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\left(1-2\int_{\left(\frac{1}{4}\log m\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\infty}e^{-x_i^2}dt\right)^m$$

$$\leqslant\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{m}}\right)\right)^m=\frac{1}{4}.$$

$$\int_{R^n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|dG_n(x)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\log m}\,G_n\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\log m}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\log m}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\sqrt{\log m}.$$

但对 $1\leqslant m\leqslant m_0$，由

$\int_{R^{m_0}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|dG_{m_0}(x)>0$，取$C_1>0$，使得对于 $1\leqslant m\leqslant m_0$，有

$$\int_{R^{m_0}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|dG_{m_0}(x)>C_1\sqrt{\log m}.$$

于是对 $1\leqslant m\leqslant m_0\leqslant n$，有

$$\int_{R^n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|dG_n(x)=\int_{R^{m_0}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|dG_{m_0}(x)$$

$$>C_1\sqrt{\log m}.$$

令 $C=\min\left(C_1,\ \frac{3}{8}\right)$，于是对任意 n，及$1\leqslant n\leqslant m$，有

$$\int_{R^n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|dG_n(x)\geqslant C\sqrt{\log m}.$$

其中 C 为绝对常数，即(4.12)式成立。证毕。

综合上述各定理，现在容易得到 Dvoretsky 定理的证明。

Dvoretsky 定理 对每个 $\varepsilon>0$，存在一个绝对常数 $C(\varepsilon)>0$，使得对任何 n 维空间 $X=(R^n,\|\cdot\|)$，存在 X 的一个子空间 Y，使

(1) $\dim Y=k,\ k\geqslant C(\varepsilon)\log n$.

(2) 存在 Y 上一个 Euclid 范数$|\cdot|$，使

$$(1-\varepsilon)|y|\leqslant\|y\|\leqslant(1+\varepsilon)\|y\|,\ \forall y\in Y.$$

证明　不妨设 $n\geqslant 3$。

令 D 是 $U(X)$ 中最大体积的椭圆。

令 $|\cdot|_D$ 是相应的 Euclid 范数。由John定理（定理 4.3.13）。

$$n^{-\frac{1}{2}}|x|_D\leqslant\|x\|\leqslant|x|_D,\ \forall x\in X,$$

应用定理 4.3.15 ($b=1$, $ab\leqslant\sqrt{n}$)，有

$$\frac{1}{2}M_r\leqslant A_r\leqslant(\pi+1)M_r \tag{4.13}$$

其中 $r(x)=\|x\|$　$(n\geqslant 3)$。

再应用 Dvoretsky-Rogers 定理（定理 4.3.14），存在关于 $|\cdot|_D$ 的正规化正交基 $(u_i)_{i=1}^n$，使 $\|u_i\|\geqslant\frac{1}{4}$, $i=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$。

由 $S^{n-1}=\{x\in R^n;|x|_D=1\}$ 上正规化“球面面积”测度 μ_{n-1} 的正交不变性，对固定 $t\in[0,1]$，有

$$A_r=\int_{S^{n-1}}\left\|\sum_{i=1}^n x_iu_i\right\|d\mu_{n-1}(x)=\int_{S^{n-1}}\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_iu_i\right\|d\mu_{n-1}(x),$$

其中 $(r_i(t))$ 为 Rademacher 函数组。

对上式关于 t 在 $[0,1]$ 上积分，有

$$\begin{aligned}A_r&=\int_0^1\int_{S^{n-1}}\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_iu_i\right\|d\mu_{n-1}(x)dt\\&\geqslant\int_{S^{n-1}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_iu_i\|d\mu_{n-1}(x)\ \text{（应用三角不等式）}\\&=\int_{S^{n-1}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|d\mu_{n-1}(x)\\&\geqslant C\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad\text{（应用定理 4.3.22）}\end{aligned}$$

其中 C 为绝对常数。

故由(4.13)式和上式知，

$$M_r\geqslant\frac{1}{\pi+1}A_r\geqslant\frac{C}{n+1}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由定理 4.3.19 知，对任 $\varepsilon>0$，存在 $C(\varepsilon)>0$，使得对任何 n 维 Banach 空间 X，存在 X 的 k 维子空间 Y，使

(1) $$\dim Y = k \geqslant C(\varepsilon)\ (n-2)\left(\frac{M_r}{b}\right)^2$$

$$\geqslant C(\varepsilon)(n-2)\frac{C^2}{(\pi+1)^2}\frac{\log n}{n}$$

（注意此时 $b=1$）。

(2) $(1-\varepsilon)M_r|y|_D \leqslant \|y\| \leqslant (1+\varepsilon)M_r|y|_D, \forall y \in Y$。

令 $|y| = M_r|y|_D, \forall y \in Y$，则 $|\cdot|$ 是 Y 上的 Euclid 范数，且

$$(1-\varepsilon)|y| \leqslant \|y\| \leqslant (1+\varepsilon)|y|, \forall y \in Y.$$

注意，当 $n \geqslant 3$ 时，$\frac{n-2}{n} \geqslant \frac{1}{3}$，故

$$k \geqslant C(\varepsilon)\frac{C^2}{(\pi+1)^2}\cdot\frac{1}{3}\log n,$$

令 $$C_1 = C(\delta)\frac{C^2}{(\pi+1)^2}\cdot\frac{1}{3}$$ 即可。

我们看到，当 $n<3$ 时，$\log n<1$，因此，取 $k=1$ 即可，证毕。

从Dvoretsky定理的上述证明看到，概率论的方法在 Banach 空间理论研究中是一个重要方法。这点也在 Davie 继 Enflo 后给出一个可分但不具基的 Banach 空间的例子中看到（参考书〔L-T-I〕）。

对许多具体空间 $l_1^n, l_p^n, (1<p<+\infty), l_\infty^n$ 及 L_p 的低维Euclid 截口（子空间）的维数估计，有许多较新的结论〔M-S-1〕。

第四章参考文献

〔B-1〕Z. Behyamini Two point symmetrization, the isoperimetric inequality on the sphere and some applications.

Longhon Notes.(1983-1984)53～76 Texas Uuiv.

〔D-1〕A. Dvoretsky Some results on convex bodies and Banach spaces.

Proc. Symp. on Linear spaces, Jerusalem (1961) 123～160.

(D-R-1) A. Dvoretsky & C.A.Rogers Absolut and uncoditional convergence in normed linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci.U.S.A. 36(1950)192～197.

(F-L-M-1) T. Figiel, J. Lindenstrauss & V. D. Milman The dimension of almost spherical sections of convex bodies Acta Math.139(1977)53～94.

(G-K-M-1) V. Gurarii, M. Kadec & V. Macaev On the distance between finite dimensional l_p spaces. Math. Sb.70(1966).481～489.

(M-S-1) V. D. Milman & G. Schechtman Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces. Lecture Notes 1200*(1986)springer.

第五章　型(type)和余型(cotype)

前面我们引入的$[0,1]$上的 Rademacher 函数组$\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$，用概率论的术语来描述，就是一种以概率$\frac{1}{2}$取值$\pm 1$的独立同分布随机变量的序列（或者一个 Bernoulli 序列）。根据概率论中熟知的定理，若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是实数列，则下列两个条件是等价的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n < +\infty$, a.e.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$.

如果$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是 Banach 空间 X 中的序列，上述两个条件是否等价呢？著名的 Kwapin 定理表明，(1)与(2)等价的充要条件是 X 线性同胚于 Hilbert 空间（见定理 5.3.6）。

我们把上述问题作更一般的考虑，引入 type 与 cotype 概念。

定义 5.0.1　若$1 < p \leqslant 2$，Banach 空间 X 称为型p(type p)，如果存在一个常数 $C > 0$，使得对任$(x_i)_{i=1}^{n} \subset X$，有

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.1}$$

并且称满足上式的最小常数 C 为 X 的 type　p 常数，记为 $t_p(X)$。

对 X 到 Y 的有界线性算子 T 也可引入型(type)的概念。

定义 5.0.2　若$1 < p \leqslant 2$，$T \in L(X, Y)$称为型p(type p)，如果存在一个常数 $C > 0$，使得对任$(x_i)_{i=1}^{n} \subset X$，有

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(x) Tx \right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.2}$$

并且称满足上式的最小常数 C 为 T 的 type p 常数，记为$t_p(T)$。

注 1　X 是 type p 的充要条件是 X 上恒等算子 I_X 是 type p，且 $t_p(X)=t_p(I_X)$。□

注 2　用 Bochner 可积空间的范数表达(5.1)式，即

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|_{L_2([0,1],X)} \leqslant C\|(x_i)_{i=1}^{n}\|_{l_p^n}.$$

有时也用数学期望形式将(5.1)式写为

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2 \leqslant C^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{2}{p}}. \ \square$$

同样可定义余型(cotype)。

定义 5.0.3　若 $2\leqslant q<+\infty$，$T\in L(X,Y)$称为 cotype q，如果存在一个常数 $C>0$，使得对任$(x_i)_{i=1}^{n}\subset X$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(E\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.3)$$

并且称满足上式的最小常数 C 为 T 的 cotype q常数，记为 $ct_q(T)$。

Banach 空间 X 称为余型 q(cotype q)，如果 X 上恒等算子 I_X 是 cotype q，且 $ct_q(X)=ct_q(I_X)$。

为什么对 type p 及 cotype q的定义中，p，q 要作如上限制呢？事实上，我们将证明(定理 5.2.1)任何 Banach 空间都是 type 1，并且不可能有大于 2 的 type；任何 Banach 空间都是 cotype ∞，并且不可能有小于 2 的 cotype。

在 §1 中我们将证明著名的 Kahane 定理，它表明：对 $1\leqslant p<+\infty$，$\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|_{L_p([0,1],X)}$ 均等价。在本章中，我们将反复使用 Kahane 定理。在 §2，我们对熟知的经典空间讨论它们的 type 和 cotype。在 §3，我们研究 type 和 cotype 在 Banach 空间值的概率论中的特征。在 §4，我们研究与 type 密切相关的 B 凸性质，在 §5 中，我们讨论 q 一致凸与 p 一致光滑问题。

§1　Kahane 不等式

Kahane不等式可看作Khintchine不等式的推广，它有许多种证明，有的是从分析有限维空间的凸集的体积之比及有限维空间上概率测度的角度加以证明的(M-S-1)。下面给出一个分析证明。

定理 5.1.1　(Kahane不等式)　若$1<p<+\infty$，则存在一个绝对常数$K_p>0$，使得对任何Banach空间X，任何$(x_i)_{i=1}^n\subset X$，有

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt\leqslant\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant K_p\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt.$$

首先，由Hödel不等式，下式总成立：

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt\leqslant\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

另一方向的不等式是由$(r_i(t))_{i=1}^\infty$的特殊性质所决定的，为此，我们要证明一个不等式。

引理 5.1.2　令$1<p\leqslant q<+\infty$，$\alpha=\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$，则对每个实数$u$，有

$$\left(\frac{|1+\alpha u|^q+|1-\alpha u|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\frac{|1+u|^p+|1-u|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明　分几种情况考虑.

(1) 设$1<p\leqslant q\leqslant 2$，$\alpha=\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$，不妨设$u\geqslant 0$。

(a) $0\leqslant u\leqslant 1$。由于

$$\binom{q}{2k}\alpha^2\leqslant\frac{q}{p}\binom{p}{2k},\quad k=1,2,\cdots \tag{5.3}$$

及

$$(1+v)^r \leqslant 1+rv,\ 0<r\leqslant 1,\ v>0, \tag{5.4}$$

故

$$\left(\frac{|1+\alpha u|^q+|1-\alpha u|^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\alpha^{2k}u^{2k}\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leqslant 1+\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\alpha^{2k}u^{2k} \qquad \text{(根据(5.4))}$$

$$\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{2k}u^{2k} \qquad \text{(根据(5.3))}$$

$$=\frac{|1+u|^p+|1-u|^p}{2}. \qquad (0<u\leqslant 1).$$

(*b*) $u\geqslant 1$，则 $0<\frac{1}{u}\leqslant 1$，且 $|1\pm\alpha u|\leqslant|u\pm\alpha|$，故

$$\left(\frac{|1+\alpha u|^q+|1-\alpha u|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\frac{|u+\alpha|^q+|u-\alpha|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=u\left(\frac{\left|1+\alpha\frac{1}{u}\right|^q+\left|1-\alpha\frac{1}{u}\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant u\left(\frac{\left|1+\frac{1}{u}\right|^p+\left|1-\frac{1}{u}\right|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\frac{|1+u|^q+|1-u|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(2) 设 $2\leqslant p\leqslant q<+\infty$，则 $1<q'\leqslant p'\leqslant 2$，其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

且

$$\alpha=\sqrt{\frac{q-1}{p-1}}=\sqrt{\frac{q'-1}{p'-1}}=\alpha'.$$

令 $T: L_{q'}[0,1]\longrightarrow L_{p'}[0,1]$，

$$(Tf)(s)=\int_0^1 f(t)dt+\alpha'\left(\int_0^1 f(t)r_1(t)dt\right)r_1(s).$$

则 $T^*: L_p[0,1]\longrightarrow L_q[0,1]$,

$$(T^*f)(s)=\int_0^1 f(t)dt+\alpha\left(\int_0^1 f(t)r_1(t)dt\right)r_1(s).$$

其中 $r_1(t)=1$，当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$；$r_1(t)=-1$，当 $\frac{1}{2}<t\leqslant 1$。

容易验证：

$$\|T\|\leqslant 1\Longleftrightarrow\left(\frac{|1+\alpha'u|^{p'}+|1-\alpha'u|^{p'}}{2}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant\left(\frac{|1+u|^{q'}+|1-u|^{q'}}{2}\right)^{\frac{1}{q'}},\quad u\in R^1,$$

$$\|T^*\|\leqslant 1\Longleftrightarrow\left(\frac{|1+\alpha u|^{q}+|1-\alpha u|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{|1+u|^{p}+|1-u|^{p}}{2}\right)^{\frac{1}{p}},u\in R^1,$$

$\left(\text{注意验证中用到}\int_0^1 r_1(t)dt=0\right)$。

由于 $\|T\|\leqslant 1\Longleftrightarrow\|T^*\|\leqslant 1$，应用(1)的结论，即知(2)成立。

(3) 设 $1<p\leqslant 2\leqslant q<+\infty$，$\alpha=\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$，则对 $u\in R^1$,

$$\left(\frac{|1+\alpha u|^q+|1-\alpha u|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{\left|1+\sqrt{\frac{1}{q-1}}\sqrt{p-1}\,u\right|^q+\left|1-\sqrt{\frac{1}{q-1}}\sqrt{p-1}\,u\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{|1+\sqrt{p-1}u|^2+|1-\sqrt{p-1}\,u|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{|1+u|^p+|1-u|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\text{ 证毕。}$$

我们发现上述不等式中实数 u 换成 Banach 空间的元仍然成立，事实上，有下面引理。

引理5.1.3 设$1<p\leqslant q<+\infty$，$\alpha=\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$，对任何Banach空间$X$，及任何$x,y\in X$，有

$$\left(\frac{\|x+\alpha y\|^q+\|x-\alpha y\|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\frac{\|x+y\|^p+\|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 由引理5.1.2,对任$s\geqslant 0,t\geqslant 0$,有

$$\left(\frac{|s+\alpha t|^q+|s-\alpha t|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\frac{|s+t|^p+|s-t|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.5}$$

令$z_1=x+y$，$z_2=x-y$，$u_1=\frac{1}{2}(\|z_1\|+\|z_2\|)$，

$u_2=\frac{1}{2}|\|z_1\|-\|z_2\||$，由于$0<\alpha\leqslant 1$，故

$$\|x+\alpha y\|\leqslant\frac{1+\alpha}{2}\|z_1\|+\frac{1-\alpha}{2}\|z_2\|,$$

$$\|x-\alpha y\|\leqslant\frac{1-\alpha}{2}\|z_1\|+\frac{1+\alpha}{2}\|z_2\|,$$

利用(5.5)式,我们得到

$$\left(\frac{\|x+\alpha y\|^q+\|x-\alpha y\|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\|z_1\|+\frac{1-\alpha}{2}\|z_2\|\right)^q+\left(\frac{1-\alpha}{2}\|z_1\|+\frac{1+\alpha}{2}\|z_2\|\right)^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{(u_1+\alpha u_2)^q+(u_1-\alpha u_2)^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{|u_1+u_2|^p+|u_1-u_2|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\frac{\|x+y\|^p+\|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证毕.

注 上述引理的不等式实际上可写成

$$\|x+\alpha r_1(t)y\|_{L_q(X)}\leqslant\|x+r_1(t)y\|_{L_q(X)}.$$

（我们将 $L_q([0,1],X)$ 简写作 $L_q(X)$）。□

引理 5.1.4 令 $1<p\leqslant q<+\infty$，$\alpha=\sqrt{\dfrac{p-1}{q-1}}$，则对任何 Banach 空间 X 及 $(x_i)_{i=0}^{n}\subset X$，有

$$\left(\int_0^1\left\|x_0+\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\int_0^1\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

（其中 $(r_i(t))$ 为Rademacher 函数组）。

证明 用归纳法。对 $n=1$，由引理 5.1.3 即得。

假设当 n 的情况不等式成立，考虑 $n+1$ 情况。

$$\left(\int_0^1\left\|x_0+\alpha\sum_{i=1}^{n+1}r_i(t)x_i\right\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(2^{-1}\int_0^1\left\|x_0+\alpha x_{n+1}+\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^q dt\right.$$

$$\left.+2^{-1}\int_0^1\left\|x_0-\alpha x_{n+1}+\alpha\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(2^{-1}\left(\int_0^1\left\|x_0+\alpha x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{q}{p}}\right.$$

$$\left.+2^{-1}\left(\int_0^1\left\|x_0-\alpha x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(2^{-1}\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i+\alpha x_{n+1}\right\|^q_{L_p(X)}\right.$$

$$\left.+2^{-1}\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i-\alpha x_{n+1}\right\|^q_{L_p(X)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(2^{-1}\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i+x_{n+1}\right\|^p_{L_p(X)}\right.$$

$$\left.+2^{-1}\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i-x_{n+1}\right\|^p_{L_p(X)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n+1}r_i(t)x_i\right\|_{L_p(X)}.$$

证毕。

注 特别地，我们在引理中令 $x_0=0$，则得到：对 $1<p\leqslant q<$

$+\infty$，任何 Banach 空间 X，任何 $(x_i)_{i=1}^n\subset X$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|_{L_q(X)}\leqslant\sqrt{\frac{q-1}{p-1}}\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|_{L_p(X)}, \tag{5.6}$$ □

定理 5.1.1 的证明　设$1<p<+\infty$，由 Hödel 不等式，

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt\right)^{\frac{1}{2p-1}}\\ &\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^{2p}dt\right)^{\frac{p-1}{2p^2-p}}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

根据(5.6)式，

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^{2p}dt\right)^{\frac{1}{2p}}\\ \leqslant&\sqrt{\frac{2p-1}{p-1}}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

再根据(5.7)式，

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt\right)^{\frac{1}{2p-1}}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^{2p}dt\right)^{\frac{1}{2p}\cdot\frac{2p(p-1)}{p(2p-1)}}\\ \leqslant&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt\right)^{\frac{1}{2p-1}}\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}}\\ &\cdot\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{2(p-1)}{p(2p-1)}},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p(2p-1)}}\\ \leqslant&\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt\right)^{\frac{1}{2p-1}},\end{aligned}$$

即

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|dt.$$

令 $K_p=\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}$ 即可。证毕。

注 1　由 Kahane 不等式，type 与 cotype 定义中的数 2 $\left(及\frac{1}{2}\right)$可用任何数 $r\left(及\frac{1}{r}\right)1\leqslant r<+\infty$ 代替。下面的内容中，我们经常使用这一点，虽然，对不同的 r，type 常数可能改变，但一般说来，这并不涉及本质问题。□

注 2　由 Kahane 不等式可得到 Khintchine 不等式，事实上，对 $1\leqslant p<+\infty$，任 $(a_i)_{i=1}^n\subset R^1$，

$$\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|dt\leqslant\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|dt.$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 3\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|dt$$
$$\leqslant 3\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$
$$\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|dt$$
$$\leqslant\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n a_ir_i(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

即

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}a_ir_i(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这就是 Khintchine 不等式，当然，这里的绝对常数 A_p, B_p 未必很好。□

由 Kahane 不等式可证明下面一个 Kwapien 定理。

定理 5.1.5 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n$ 在 $L_1(X)$ 中收敛，则对任何 $C>0$，有

$$\int_0^1\exp\left(c\left\|\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\right\|^2\right)dt<+\infty.$$

证 选 $l>0$，使

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k3^{2k}C^k(2k-1)^k}{k!}l^{2k}<+\infty.$$

由于 $(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ 的独立性(概率论意义下)，

$$\int_0^1\exp\left(c\left\|\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)x_j\right\|^2\right)dt$$

$$\leqslant\int_0^1\exp\left(2c\left\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)x_j\right\|^2\right).\exp\left(2c\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}r_j(t)x_j\right\|^2\right)dt$$

$$=\int_0^1\exp\left(2c\left\|\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)x_j\right\|^2\right)dt\cdot\int_0^1\exp\left(2c\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}r_j(t)x_j\right\|^2\right)dt,$$

由(5.6)及 Kahane 不等式，

$$\int_0^1\exp\left(2c\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}r_j(t)x_j\right\|^2\right)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kc^k}{k!}\int_0^1\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}r_j(t)x_j\right\|^{2k}dt$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k c^k (2k-1)^k}{k!} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} r_j(t) x_j \right\|^2 dt\right)^k$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k c^k (2k-1)^k}{k!} K_2^{2k} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} r_j(t) x_j \right\| dt\right)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k 3^{2k} c^k (2k-1)^k}{k!} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} r_j(t) x_j \right\| dt\right)^{2k}$$

选 n_0 充分大，使 $\int_0^1 \left\| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} r_j(t) x_j \right\| dt \leqslant l$，则

$$\int_0^1 \exp\left(2c \left\| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} r_j(t) x_j \right\|\right) dt < +\infty,$$

从而，$\int_0^1 \exp\left(c \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) x_j \right\|\right) dt < +\infty$。证毕。

§2 经典空间的 type 和 cotype

容易看到 type 和 cotype 由子空间继承，且在线性同胚之下不变。我们还看到 type 与 cotype 在一定程度上由有限维子空间的"一致性"所决定，因此，type 与 cotype 是超性质（即若 X 是 type p（或 cotype q），且 Y 在 X 中有有限表示（$Y < X$），则 Y 也是 type p（相应地，cotype q））。

定理 5.2.1 (1) 任何 Banach 空间 X 是"type 1"，并且不可能是"type>2"。

(2) 任何 Banach 空间 X 是"cotype $+\infty$"，并且不可能是"cotype<2"。

证 (1) 因为对任何 Banach 空间 X 及 $(x_i)_{i=1}^n \subset X$，

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt \leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^n \|x_i\| dt = \sum_{i=1}^n \|x_i\|,$$

故任何 Banach 空间 X 是"type 1"。

若 $p>2$，且存在 $M>0$，使得对任意 $(x_i)_{i=1}^n \subset X$，有

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(x) x_j \right\| dt \leqslant M \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

取 $x_j \equiv x_0 \in S(X)$，$1 \leqslant j \leqslant n$，则根据 Khintchine 不等式及上式有，

$$A_1 n^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t) \right| dt \leqslant M n^{\frac{1}{p}}, \quad \forall n,$$

矛盾！故任何 Banach 空间不可能是"type>2"。

(2) 因为对任何 Banach 空间 X，任何 $(x_i)_{i=1}^n \subset X$，

$\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant 2^{-n} \sum\limits_{\theta_j = \pm 1} \left\| \sum\limits_{j=1}^n \theta_j x_j \right\| = \int_0^1 \left\| \sum\limits_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\| dt$，故任何 Banach 空间 X 是"cotype $+\infty$"。

若 $q<2$，且存在 $M>0$，使得对任 $(x_i)_{i=1}^n \subset X$，有

$$M \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\| dt,$$

在上式中取 $x_j \equiv x_0 \in S(X)$，$1 \leqslant j \leqslant n$，则有

$$M n^{\frac{1}{q}} \leqslant n^{\frac{1}{2}}, \forall n.$$

矛盾！故任何 Banach 空间不可能是"cotype<2"。证毕。

命题 5.2.2 (1) 若 $1<p' \leqslant p \leqslant 2$，如果 Banach 空间 X 是 type p，则 X 也是 type p'。

(2) 若 $2 \leqslant q \leqslant q' < +\infty$，如果 Banach 空间 X 是cotype q，则 X 也是 cotype q'。

证明 由于$\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$是 p 的减函数。证毕。

设(Ω, Σ, μ)是有限测度空间，记 $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$为 $L_p(\Omega)$。

为了讨论 $L_p(\Omega)$空间的 type 与 cotype，我们需要下面的引理

引理 5.2.3 若 $2 \leqslant q < +\infty$，$(f_i)_{i=1}^n \subset L_q(\Omega)$，则

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 $$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q=\left\|\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{\frac{q}{2}}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证毕。

注 这个定理也可叙述为当 $2\leqslant q<+\infty$ 时，$L_q(\Omega)$ 是 2 凸的。□

引理 5.2.4 若 $1\leqslant p\leqslant 2$，$(f_i)_{i=1}^{n}\subset L_p(\Omega)$，则
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

证明 $$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^p=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}(|f_i|^p)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}d\mu$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_p^2\right)^{\frac{p}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega|f_i|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

对每个固定的 ω，将 $(|f_1(\omega)|^p,\cdots,|f_n(\omega)|^p)$ 看作 $l_{\frac{2}{p}}^{n}$ 的元，由 Bochner 积分的性质：
$$\left\|\int_\Omega f(\omega)d\mu\right\|_X\leqslant\int_\Omega\|f(\omega)\|_X d\mu \tag{5.8}$$
(取 $X=l_{\frac{2}{p}}^{n}$) 即知
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega|f_i|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}\leqslant\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}(|f_i|^p)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}d\mu$$

故 $$\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_p^2\right)^{\frac{p}{2}}\leqslant\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^p,$$

即 $$\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

证毕。

注 这个引理也可叙述为当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，$L_p(\Omega)$ 是 2 凹的。□

定理 5.2.5 若 $1\leqslant p\leqslant 2$，则 $L_p(\Omega)$ 是 type p，cotype 2，并

且当 $\dim L_p(\Omega)=+\infty$ 时，$L_p(\Omega)$不可能是 type r，对 $r>p$。

注　对 $p=1$，我们理解作 $L_1(\Omega)$是"type1"。□

证明　(1)若 $1\leqslant p\leqslant 2$，则 $L_p(\Omega)$是 type p。事实上，

对固定 $\omega\in\Omega$，由$(r_i(t))$在 L_2 中正交性及 $1\leqslant p\leqslant 2$，知

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i(\omega)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i(\omega)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n|f_i(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n|f_i(\omega)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

即
$$\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i(\omega)\right|^p dt\leqslant\sum_{i=1}^n|f_i(\omega)|^p.$$

对上式关于 ω 积分，得

$$\int_\Omega\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i(\omega)\right|^p dtd\mu\leqslant\sum_{i=1}^n\|f_i\|_p^p,$$

但

$$\int_\Omega\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i(\omega)\right|^p dtd\mu$$

$$=\int_0^1\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i(\omega)\right|^p d\mu dt$$

$$=\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i\right\|_p^p dt,$$

故

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)f_i\right\|_p^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n\|f_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(利用 Kahane 不等式)，立即得到 $L_p(\Omega)$是 type　p。

(2) 若 $1\leqslant p\leqslant 2$，则 $L_p(\Omega)$是cotpe　2。事实上，由引理 5.2.4，$L_p(\Omega)$是 2 凹的，再应用 Khintchine 不等式，$L_p(\Omega)$ 范数单调性及 $L_p(\Omega)$值的 Bochner 积分不等式(5.8)得

$$\left(\sum_{i=1}^n\|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\|\left(\sum_{i=1}^n|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$$

$$\leqslant \left\| A_1^{-1}\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(\omega) \right| dt \right\|_p$$

$$\leqslant A_1^{-1}\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_p dt$$

$$\leqslant A_1^{-1}\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_p^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故 $L_p(\Omega)$是 cotype 2（注　A_1 是 Khintchine 不等式中绝对常数）。

(3) 若 $1\leqslant p\leqslant 2$，且 $L_p(\Omega)$ 是无穷维的，则 $L_p(\Omega)$ 不是 type r，对 $r>p$。事实上，由于 l_p 等距于 $L_p(\Omega)$的子空间（用到 $\dim L_p(\Omega)=+\infty$）及由 type 的子空间继承性知，只须证 l_p 不是 type r，对 $r>p$。设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l_p 的自然基，则

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i e_i \right\| = n^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \theta_i = \pm 1.$$

故

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) e_i \right\| dt = 2^{-n} \sum_{\theta_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i e_i \right\| = n^{\frac{1}{p}},$$

但$\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}} = n^{\frac{1}{r}}$，由此立即知道 l_p 不是 type r，对 $r>p$。证毕。

注　实际上，我们也证明本定理对 $l_p(1\leqslant p\leqslant 2)$成立。□

定理 5.2.6　若 $2\leqslant q<+\infty$，则 $L_q(\Omega)$ 是 cotype q，type 2，且当$\dim L_q(\Omega)=+\infty$ 时，L_q 也不是 cotype r，对 $r<q$。

证明　(1) 若 $2\leqslant q<+\infty$，则 $L_q(\Omega)$是cotype q。事实上，由 Khintchine 不等式、$L_q(\Omega)$ 范数的单调性及 $L_q(\Omega)$ 值的 Bochner 积分的不等式(5.8)，有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega |f_i|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\|_q \leqslant \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q$$

$$\leqslant \left\| A_1^{-1}\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(\omega) \right| dt \right\|_q$$

$$\leqslant A_1^{-1}\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_q dt$$

$$\leqslant A_1^{-1}\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_q^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 若 $2\leqslant q<+\infty$，利用 Khintchine不等式及 $L_q(\Omega)$ 的 2 凸性知，

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_q dt \leqslant \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i \right\|_q^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int_0^1\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(\omega) \right|^q d\mu dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int_\Omega\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(\omega) \right|^q dt d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant B_p\left(\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{q}{2}} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=B_p\left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q$$

$$\leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由 Kahane 不等式即知，$L_q(\Omega)$ 是 cotype 2.

(3) 若 $2\leqslant q<+\infty$，且 $\dim L_q(\Omega)=+\infty$，则 $L_q\Omega)$ 不是 cotype $r<q$. 事实上，同上一个定理说明，只须证当 $2\leqslant q<+\infty$ 时，l_q 不是 cotype r（对 $r<p$）即可. 令 $(e_n)_{n=1}^\infty$ 是 l_q 的自然基，则

$$\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}}=n^{\frac{1}{r}},$$

但

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) e_i \right\| dt = n^{\frac{1}{q}}.$$

因而，对 $r<q$，l_p 不是 cotype r. 证毕.

注 1　实际上，我们也证明了对 $l_q(2\leqslant q<+\infty)$ 本定理成立。□

注 2　这个定理也可用在自反空间中，type 与 cotype 的对偶性(定理 5.2.8)得到。□

定理 5.2.7　$L_\infty(\Omega)$ 是 "type 1""cotype ∞"，并且当 $\dim L_\infty(\Omega)=+\infty$，$L_\infty(\Omega)$ 不是 type p，对任何 $p>1$，$L_\infty(\Omega)$ 不是 cotype q，对任何 $q<+\infty$。

证明　由定理 5.2.1 知 $L_\infty(\Omega)$ 是"type 1"和 cotype $+\infty$"。

剩下只须证明 l_∞ 不是 type p，对任何 $p>1$ 以及 l_∞ 不是 cotype q，对任何 $q<+\infty$ 即可。由于 L_p 等距于 l_∞ 的子空间，$1\leqslant p<+\infty$，再由 type、cotype 的子空间的继承性，结合定理 5.2.5 及定理 5.2.6 即知所要结论。证毕。

注　容易看到 c_0 也是"type 1"，"cotype $+\infty$"不是 type p，对任 $p>1$；不是 cotype q，对任意 $q<+\infty$。因而若 $c_0\subset\!\!\to X$，则 X 仅为"type 1"，"cotype $+\infty$"。□

利用 Kahane 不等式可证明下面的"弱对偶性"。

定理 5.2.8　若 $1<p\leqslant 2$，如果 Banach 空间 X 是 type p，则 X^* 是 cotype q，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明　任取 $(x_i^*)_{i=1}^n\subset X^*$。

对任何 $\varepsilon>0$，选 $(x_i)_{i=1}^n\subset S(X)$，使

$$\|x_i^*\|\leqslant(1+\varepsilon)x_i^*(x_i)\qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

由 Hödel 不等式、Kahane 不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant(1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^n(x_i^*(x_i))^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=(1+\varepsilon)\sup\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i^*(x_i),\ \sum_{i=1}^n|a_i|^p\leqslant 1\right\}$$

$$=(1+\varepsilon)\sup\left\{\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i^*\right)\right.$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i x_i\right) dt;\ \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant 1\Big\}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\sup\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i^*\Big\|_{L_q(X^*)}$$

$$\cdot\Big\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i x_i\Big\|_{L_p(X)};\ \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant 1\Big\}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) K_p \sup\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i^*\Big\|_{L_p(X^*)}$$

$$\cdot\Big\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i x_i\Big\|_{L_2(X)};\ \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant 1\Big\}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) K_p t_p(X)\ \sup\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i^*\Big\|_{L_q(X^*)}$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} \|a_i x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}};\ \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant 1\Big\}$$

$$= (1+\varepsilon) K_p t_p(X)\ \Big\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i^*\Big\|_{L_q(X^*)}.$$

再应用 Kahane 不等式，即知 X^* 是 cotype q。证毕。

注 1　显然，从定理立即可知，若 X^* 是 type p，则 X 是 cotype q，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。□

注 2　定理的逆一般不成立，例如 c_0 是 type 1，$c_0^* \cong l_1$ 是cotype 2。但有如下推论。□

推论 5.2.9　若 X 是自反空间，并且 X 是 cotype q，$2\leqslant q<+\infty$，则 X^* 是 type p，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

注　实际上，Pisier(Pi-1)证明若 X 是 B 凸的 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

(1) X 是 type $p \Longleftrightarrow X^*$ 是 cotype q。

(2) X^* 是 type $p \Longleftrightarrow X$ 是 cotype q。□

§3 type 与 cotype 的特征

本节将给出 type 与 cotype 的特征。这些特征与 Banach 空间取值的随机变量的收敛性有密切联系。这样，就使我们把 type 与 cotype 的定义和本章一开始提出的问题联系起来。

我们首先需要证明若干引理。

引理 5.3.1 (Levy 引理) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n \overset{a.e}{<} +\infty$，则对每个 $a>0$，有

$$m\left(\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|>a\right)\leqslant 2m\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>a\right),$$

其中 m 是[0,1]上的 Lebesgue(概率)测度。

证明 不妨设$\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n<+\infty$。

令 $A_1=\{t;\|r_1(t)x_1\|>a\}$

$A_2=\{t;\|r_1(t)x_1\|\leqslant a,\ \|r_1(t)x_1+r_2(t)x_2\|>a\}$

$\vdots$

$$A_k=\left\{t;\|r_1(t)x_1\|\leqslant a,\cdots,\left\|\sum_{i=1}^{k-1}r_i(t)x_i\right\|\leqslant a,\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i\right\|>a\right\},$$

$\vdots$

$$A=\left\{t;\ \sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|>a\right\},\ B=\left\{t;\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>a\right\},$$

则 $A_k\cap A_l=\Phi,k\neq l$，且 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$。

我们有，对任意 k，

$$m(B\cap A_k)\geqslant\frac{1}{2}m(A_k). \tag{5.9}$$

事实上，因为$\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i\right\|\leqslant\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i+\sum_{i=k+1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|$

$$+\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i-\sum_{i=k+1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|,$$ 故

$$A_k=(A_k\cap B)\cup\left(A_k\cap\left\{t;\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i-\sum_{i=k+1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>a\right\}\right)$$

由于 $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列以概率$\frac{1}{2}$取±1的独立随机变量，故

$$m(A_k\cap B)=m\left(A_k\cap\left\{t;\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i-\sum_{i=k+1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>a\right)\right\}$$

因此，　　$m(A_k\cap B)\geqslant\frac{1}{2}m(A_k)$，即(5.9)式成立。

但是，

$$m(B)\geqslant m(A\cap B)=\sum_{k=1}^{\infty}m(B\cap A_k)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}m(A_k)$$

$$=\frac{1}{2}m(A).$$

证毕。

引理 5.3.2　(1) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\overset{\text{a.e}}{<}+\infty$，且存在 $a>0,b>0$，使

$$m\left(\left\|\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\right\|>a\right)<\frac{b}{2},$$

则　$m\left(\left\|\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\right\|>2a\right)<b^2$.

(2) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $\sup\limits_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|\overset{\text{a.e}}{<}+\infty$，且存在 $a>0,b>0$，使

$$m\left(\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|>a\right)<b,$$

则

$$m\left(\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|>2a\right)<2b^2.$$

证明　(1) 不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n<+\infty$。

令　$A=\left\{t;\ \sup\limits_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|>a\right\}$,

$B=\left\{t;\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>a\right\}$,

$$C=\left\{t;\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>2a\right\}.$$

由假设 $m(B)<\frac{b}{2}$，根据引理 5.3.1 知，

$$m(A)\leqslant 2m(B)<b.$$

象引理 5.3.1 证明中那样，令

$$A_1=\{t;\ \|r_1(t)x_1\|>a\}$$

$$\vdots$$

$$A_k=\left\{t;\ \|r_1(t)x_1\|\leqslant a,\ \cdots,\left\|\sum_{i=1}^{k-1}r_i(t)x_i\right\|\leqslant a,\right.$$
$$\left.\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i\right\|>a\right\}$$

$$\vdots$$

且令 $C_k=\left\{t;\ \left\|\sum_{i=k}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>a\right\},k\geqslant 1.$

我们看到，$A_k\cap A_l=\phi,\ k\neq l,$

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,C\subset A. \tag{5.10}$$

由于 $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立随机变量，故

$$m(A_k\subset C_k)=m(A_k)\cdot m(C_k),$$

且

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{k-1}r_i(t)x_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=k}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|,$$

故 $A_k\cap C\subset C_k$，从而 $A_k\cap C\subset C_k\cap A_k$，因此

$$m(A_k\cap C)\leqslant m(A_k\cap C_k)=m(A_k)m(C_k)$$
$$\leqslant m(A_k)\sup_n m(C_n),\quad\forall k.$$

因此，根据(5.10)式，有

$$m(C)\leqslant m(A)\sup_n m(C_n) \tag{5.11}$$

另一方面，由于

$$\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|\leqslant\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{k}r_i(t)x_i+\sum_{i=k+1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|$$

$$+\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{k} r_i(t)x_i-\sum_{i=k+1}^{\infty} r_i(t)x_i\right|,$$

故

$$C_k\subset B\cup\left\{t;\left|\sum_{i=1}^{k} r_i(t)x_i-\sum_{i=k+1}^{\infty} r_i(t)x_i\right|>a\right\},$$

因为 $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列以概率 $\frac{1}{2}$ 取 ± 1 的独立随机变量，故

$$m(B)=m\left(t;\left|\sum_{i=1}^{k} r_i(t)x_i-\sum_{i=k+}^{\infty} r_i(t)x_i\right|>a\right)$$

因此，$m(C_k)\leqslant 2m(B)$，所以

$$\sup_n m(C_n)\leqslant 2m(B),$$

再根据(5.11)式，有

$$m(C)\leqslant 2m(A)m(B)\leqslant b^2.$$

证毕.

(2) 不妨设 $\sup\limits_n\left|\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right|<+\infty$. $\forall t\in[0,1]$.

令 $D=\left\{t;\ \sup\limits_n\left|\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right|>2a\right\}$,

$\leqslant D_k=\left\{t;\ \sup\limits_{p\geqslant 0}\left|\sum\limits_{i=k}^{k+p} r_i(t)x_i\right|>a\right\}$,

$A=\left\{t;\ \sup\limits_n\left|\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right|>a\right\}$,

$A_k=\left\{t;\ |r_1(t)x_1|\leqslant a,\cdots,\left|\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i(t)x_i\right|\leqslant a,\right.$

$\left.\left|\sum\limits_{i=1}^{k} r_i(t)x_i\right|>a\right\}$,

由假设 $m(A)<b$，因为 $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立随机变量，故

$$m(A_k\cap D_k)=m(A_k)m(D_k).$$

因为 $\left|\sum\limits_{i=k}^{k+p} r_i(t)x_i\right|\geqslant\left|\sum\limits_{i=1}^{k+p} r_i(t)x_i\right|-\left|\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i(t)x_i\right|$,

所以，$A_k\cap D\subset D_k$，从而 $A_k\cap D\subset A_k\cap D_k$，故

$$m(A_k\cap D)\leqslant m(A_k\cap D_k)=m(A_k)\cdot m(D_k)$$

$$\leqslant m(A_k)\sup_n m(D_n).$$

由于$D\subset A$；$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$；$A_k\cap A_l=\Phi, k\neq l$，故

$$m(D)\leqslant m(A)\sup_n m(D_n).$$

同(1)证明，利用$\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$是以概率$\frac{1}{2}$取 ± 1 的随机变量列，得

$$m(D_k)\leqslant 2m(A).$$

因此，

$$\sup_n m(D_n)\leqslant 2m(A).$$

所以，

$$m(D)\leqslant 2m(A)m(A)<2b^2.$$

证毕。

定理 5.3.3 (1) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\overset{a.e}{<}+\infty$，则对任意 $p, 1\leqslant p<+\infty$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\in L_p(X).$$

(2) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i(t)x_i\right\|<+\infty$，则对任 $p, 1\leqslant p<+\infty$，有

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x\right\|\in L_p(X).$$

证明 (1) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\overset{a.e}{<}+\infty$，我们不妨设$\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i<+\infty, \forall t\in[0,1]$。因此，存在$M>0$，使

$$m\left(t;\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|\geqslant M\right)<\frac{1}{8}.$$

由引理 5.3.2(1)知

$$m\left(t;\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|>2^nM\right)<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

令 $A_0=\left\{t;\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|\leqslant M\right\}$，$A_{n+1}=\left\{t;2^nM<\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\right\|\right.$

$\leqslant 2^{n+1}M \Big\}, n=0,1,2,\cdots$，则

$$m(A_1)\leqslant\frac{7}{8},\quad m(A_n)<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{\infty} r_i(t)x_i\right\|^p dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} r_i(t)x_i\right\|^p dt$$

$$\leqslant\frac{7}{8}M^p+\sum_{n=2}^{\infty}2^{(n+1)p}M^p\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}<+\infty$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}r_i(t)x_i\in L_p(X)$。证毕。

(2) 与(1)有类似的证明。证毕。

注 若 $0<p<1$，令 $L_p(X)=\{f:[0.1]\longrightarrow X$ 的可测函数，且 $\|f\|_{L_p(X)}=\int_0^1\|f(t)\|^p dt<+\infty\}$，则由定理证明知，定理结论仍然成立。□

定理 5.3.4 设 $1<p\leqslant 2$，X是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) X 是 type p；

(2) 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$ $\Big($即$(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_p(X)\Big)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n(t)x_n\overset{\text{a.e}}{<}+\infty$。

(3) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_p(X)$，则

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|\overset{\text{a.e}}{<}+\infty;$$

(4) 存在常数 K，使对任何 X 值独立均值为 0 的随机变量列$(x_i(\omega))_{i=1}^{n}$，有

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i(\omega)\right\|^p\leqslant K\sum_{i=1}^{n}E\|x_i(\omega)\|^p.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使$(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_p(X)$，由于 X 是 type p，故对任何 $m>l$，有

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=m}^{l}r_i(t)x_i\right\|dt\leqslant K\left(\sum_{i=m}^{l}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 K 为某个常数。

因此，$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(X)$ 中 Cauchy 列，从而在 $L_1(X)$ 中收敛。但 $\left(\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i,\ \sigma_n\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 Martingale，其中 σ_n 是使 $(r_i(t))_{i=1}^{n}$ 可测的最小 σ 代数，因而，根据极大不等式的推论（定理 2.2.10）知，$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 a.e 收敛的，从而，$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n \overset{a.e}{<} +\infty$。证毕。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 显然。

(3) $\Longrightarrow$ (1) 令 $X_0=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X;\ \sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|\overset{a.e}{<}+\infty,\ \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_0=\sup_n\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|dt\right\}$，$X_p=l_p(X)$。

由定理 5.3.3(2) 知，若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使得 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|\overset{a.e}{<}+\infty$，则 $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_0<+\infty$，也容易验证 X_0 是 Banach 空间。令 $I: X_p\longrightarrow X_0$，$I(x_n)_{n=1}^{\infty}=(x_n)_{n=1}^{\infty}$，由条件(3)知，$I$ 是可以定义的，容易验证 I 是闭线性算子，根据闭图象定理知，I 是有界线性算子，从而存在 $K>0$，使

$$\sup_n\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|dt\leqslant K\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

根据 Kahane 不等式，立刻知 X 是 type p。证毕

(4) $\Longrightarrow$ (1) 显然

(1) $\Longrightarrow$ (4) （参见 (M-P-1)），证毕

注 1 (1) $\Longrightarrow$ (4) 的证明实际上主要是把独立均值为 0 的随机变量进行对称化后立即得到（我们不再讨论"对称化"问题，故省略证明）。□

注 2 这个定理将 type 的概念与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n$ 的 a.e 收敛概念建立了联系，特别地，若 X 是 type 2，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n \overset{\text{a.e}}{<} +\infty. \quad \square$$

此外,我们还有下列等价条件:

定理 5.3.5 设 $1<p\leqslant 2$, X是 Banach 空间,则 TFAE:

(1) X 是 type p;

(2) 若$(x_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ 是一列 X 值独立均值为 0 的独立随机变量,使 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|x_n(\omega)\|^p<+\infty$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)\xrightarrow{\text{a.e}}0;$$

(3) 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$, 使$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\|x_n\|^p<+\infty$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\xrightarrow{\text{a.e}}0.$$

证明 (参见(H-J-1)。

下面我们讨论 cotype 的特征。

定理 5.3.6 设 $2\leqslant q<+\infty$, X 是 Banach 空间,则 TFAE:

(1) X 是 cotype q;

(2) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n \overset{\text{a.e}}{<} +\infty$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^q<+\infty$, 即$(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_q(X)$;

(3) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$, 使 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\| \overset{\text{a.e}}{<} +\infty$, 则 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l_q(X)$;

(4) 存在某个常数 K,使得若$(x_i(\omega))_{i=1}^{n}$是 X 值独立均值为 0 的随机变量,则

$$\sum_{i=1}^{n} E\|x_i(\omega)\|^q\leqslant KE\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)\right\|^q.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(3)若$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$,使$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\| \overset{\text{a.e}}{<} +\infty$,由定理5.3.3(2)知

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\| \in L_2(X)。$$

从而

$$\sup_n \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\| \right)^2 dt \Bigg)^{\frac{1}{2}} < +\infty。$$

因为 X 是 cotype q，故存在常数 K，对任何 n，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant K \left(\int_0^1 \left(\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

因此，$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$，证毕。

(3)$\Longrightarrow$(2) 显然，

(2)$\Longrightarrow$(1) 令 $X_0 = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X; \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) x_n \overset{a.e}{<} +\infty, \right.$

$\|x\|_0 = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_0 = \sup_n \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$，$X_q = l_q(X)$。

由于若 $\sum_{n=1}^{\infty} r_i(t) x_i \overset{a.e}{<} +\infty$，则 $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\| \overset{a.e}{<} +\infty$，根据

定理 5.3.3(2) 知，$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_0 = \sup_n \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \left(\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty。$$

容易验证 X_0 是 Banach 空间，根据条件(2)，

$$I: X_0 \longrightarrow X_q, I(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

是可以定义的，且易证 I 是闭线性算子，根据闭图象定理，I 是有界线性算子，由此立即得到 X 是 cotype q，证毕。

(4)$\Longrightarrow$(1) 显然。

(1)$\Longrightarrow$(4) 参见(M-P-1)。证毕。

注 1　(1)$\Longrightarrow$(4)实际上是考虑独立随机变量对称化。

注 2　由这个定理知，cotype 的概念与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n$ 的a.e 收敛有密切联系。特别地，若 X 是 cotype 2，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n \overset{a.e}{<} +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty.$$

因此结合定理 5.3.4 注 2，我们知道，

X 是 type 2 且 cotype 2，当且仅当下式成立：

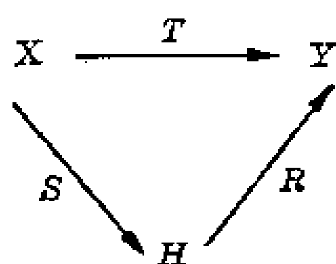
$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)x_n \overset{a.e}{<} +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty.$$

下面我们将证明 X 是 type 2 且 cotpe 2，当且仅当 $X\approx$Hilbert 空间。□

定理 5.3.6(Kwapin 定理)　若 X 是 Banach 空间，则 X 是 type 2 且 cotype 2 当且仅当 $X\approx$Hilbert 空间。

这个定理可以由下面更一般的定理得到。我们先引入几个定义。

定义 5.3.1　设 X,Y 是 Banach 空间，$T\in L(X,Y)$称为因子分解通过 Hilbert 空间，如果存在一个 Hilbert 空间 H 及 $S\in L(X,H)$，$R\in L(H,Y)$，使 $T=RS$(见图)。记这样的算子全体为 $\Gamma_2(X,Y)$，且令



$$r_2(T)=\inf\{\|R\|\cdot\|S\|;\ T=RS,\ S\in L(X,H), R\in L(H,Y), \text{对某个 Hilbert 空间}H\}.$$

定理 5.3.7　设 $T\in L(X,Y)$是 type2,$S\in L(Y,Z)$是cotype2，则 $ST\in\Gamma_2(X,Z)$ 且 $r_2(ST)\leqslant t_2(T)ct_2(S)$。

显然，应用定理 5.3.7 于 X 上的恒等算子，立即得到定理 5.3.6。

为了证明定理 5.3.7，我们要应用 Gauss 随机变量这一工具。

定义 5.3.2 设 (Ω,Σ,P) 是概率测度空间，(Ω,Σ,P) 上实值独立正规 Gauss 随机变量列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ 指的是 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足下列条件：

(1) $E|g_n|^2=\int_{\Omega}|g_n(\omega)|^2dP=1$；

(2) $Eg_n=\int_{\Omega}g_n(\omega)dP=0$；

(3) $(g_1,\cdots,g_n)$ 的联合分布由下式决定：

$$P(\omega;(g_1(\omega),\cdots,g_n(\omega))\in B)$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_B\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)dx_1\cdots dx_n,$$

$\forall$Borel 子集 $B\subset R^n$。

注 1 令 $\mu_{(g_1,\cdots,g_n)}(B)=P(\omega;(g_1(\omega),\cdots,g_n(\omega)\in B)$，则熟知 $(R^n,\mathscr{B}^n,\mu_{(g_1,\cdots,g_n)})$ 是一个概率测度空间，其中 $\mathscr{B}^n$ 是 R^n 中的 Borel 子集的 σ 代数。并且对任何可测函数 f：$R^n\longrightarrow R^1$，任何 Borel 子集 $B\in\mathscr{B}^n$，有

$$\int_B f(x_1,\cdots,x_n)d\mu_{(g_1,\cdots,g_n)}=\int_A f(g_1(\omega),\cdots,g_n(\omega)dP,$$

其中 $A=\{\omega\in\Omega;(g_1(\omega),\cdots,g_n(\omega))\in B\}$。□

注 2 设 (a_{ij}) 是 $n\times n$ 正交矩阵，令 $g_j'=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}g_i$，$j=1,\cdots,n$，则易见 $(g_j')_{j=1}^{n}$ 与 $(g_j)_{j=1}^{n}$ 具有同样的分布，这就意味着

$$\int_B f(x_1,\cdots,x_n)d\mu_{(g_1,\cdots,g_n)}=\int_B f(x_1,\cdots,x_n)d\mu_{(g_1',\cdots,g_n')}g_n'$$

或

$$\int_A f(g_1(\omega),\cdots,g_n(\omega))dP=\int_A f(g_1'(\omega),\cdots g_n'(\omega)dP.$$

其中 $f:R^n\longrightarrow R^1$ 是可测函数，$B\in\mathscr{B}^n$，$A\in\Sigma$。我们在下面证明中将应用 Gauss 随机变量的这一特点。□

定理 5.3.8 (1) 若 $T\in L(X,Y)$ 是 type 2，则对任何 $(x_i)_{i=1}^{n}\subset X$，有

$$\left(\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant t_2(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 若$S\in L(Y,Z)$是cotype 2，则对任何$(y_i)_{i=1}^{n}\subset Y$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|Ty_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c t_2(S)\left(\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) y_i\right\|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 (1) 任取$(x_i)_{i=1}^{n}\subset X$，对固定$\omega\in\Omega$，由于T是type2，故

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dt \leqslant t_2^2(T)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 |g_i(\omega)|^2,$$

但由于$(g_i(\omega))$与$(\pm g_i(\omega))$是同分布的，故上式对ω积分，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dP\\
&\quad=\int_0^1\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dPdt\\
&\quad=\int_0^1\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dPdt\\
&\quad=\int_{\Omega}\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dtdP\\
&\quad\leqslant t_2^2(T)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2,
\end{aligned}$$

即

$$\left(\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(\omega) T x_i\right\|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant t_2(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证毕。

(2) 可类似地证明。

证毕。

为了下面叙述方便，我们引入下面记号。

定义 5.8.3 若$(x_j)_{j=1}^{n}$，$(y_i)_{i=1}^{m}\subset X$，如果对每个$x^*\in X^*$，有

$$\sum_{i=1}^{m}|x^*(y_i)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}|x^*(x_j)|^2,$$

则称$(y_i)_{i=1}^{m}$被$(x_j)_{j=1}^{n}$控制，记作$(y_i)_{i=1}^{m} < (x_j)_{j=1}^{n}$。

引理 5.3.9 $(y_i)_{i=1}^m<(x_j)_{j=1}^n$，当且仅当存在一个矩阵 $(a_{ij})_{i=1,}^m{}_{j=1}^n$，使得对一切 $(b_j)_{j=1}^n\in R^n$，有

$$\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}b_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^n|b_j|^2.$$

且 $y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,\ i=1,\cdots,m$.

证明 "$\Longrightarrow$" 假设 $(y_i)_{i=1}^m<(x_j)_{j=1}^n$，

令 $S=\{(x^*(x_j))_{j=1}^n;x^*\in X^*\}$，则 S 是 l_2^n 的子空间，定义 $A:S\longrightarrow l_2^m$，$A((x^*(x_j))_{j=1}^n)=(x^*(y_i))_{i=1}^m$，由假设 $\|A\|\leqslant1$，将 A 保范延拓为 $\tilde{A}\in L(l_2^n,l_2^m)$，则 $\|\tilde{A}\|\leqslant1$，并且 $\tilde{A}$ 对应一个矩阵 (a_{ij})。所以，对任 $(b_j)_{j=1}^n\in R^n$，有

$$\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}b_j\right|^2=\|A((b_j)_{j=1}^n)\|^2$$

$$\leqslant\left\|(b_j)_{j=1}^n\right\|^2=\sum_{j=1}^n|b_j|^2.$$

同时，由 A 的定义知，对任 $x\in X^*$，

$$x^*(y_i)=x^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right),\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

故 $y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$，$1\leqslant i\leqslant m$。证毕。

"$\Longleftarrow$" 任给 $n\times m$ 矩阵 (a_{ij}) 满足上述性质，则对任 $x^*\in X^*$，有

$$x^*(y_i)=x^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)=\sum_{j=1}^n a_{ij}x^*(x_j),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

故对任 $x^*\in X^*$，

$$\sum_{i=1}^m|x^*(y_i)|^2=\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x^*(x_j)\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^n|x^*(x_j)|^2,$$

即 $(y_i)_{i=1}^m<(x_j)_{j=1}^n$。证毕。

下面我们将首先注意到算子因子分解通过 Hilbert 空间这一性质是取决于 T 在有限维子空间上的"一致性质"。也称为"局部性质"。

引理 5.3.10 若 $T\in L(X,Y)$，且存在常数 C，使得对 X 的一切有限维子空间 E，有 $r_2(T|_E)\leqslant C$，则 $T\in\Gamma_2(X;Y)$，且 $r_2(T)\leqslant C$。

证明 这里的证明是一种"标准紧性论证"。

令 $\mathscr{F}=\{E;E$ 是 X 的有限维子空间$\}$，$\mathscr{F}$ 中按包含关系建立一个半序。

由假设，对每个 $E\in\mathscr{F}$，$r_2(T|_E)\leqslant C$，故存在一个 Hilbert 空间 H_E，及 $B_E\in L(E,H_E)$，$A_E\in L(H_E,Y)$，使得 $T|_E=A_EB_E$，且 $\|B_E\|\leqslant 1$，$\|A_E\|\leqslant C$。

对于任意 $x,y\in X$，则当 $E\in\mathscr{F}$，$\{x,y\}\subset E$ 时，有

$$|<B_Ex,B_Ey>_E|\leqslant\|B_Ex\|\cdot\|B_Ey\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

其中 $<\cdot,\cdot>_E$ 表示 Hilbert 空间 H_E 中内积。

因此，对任 $x,y\in X$，定义

$$\langle x,y\rangle=\operatorname*{Lim}_{\mathscr{F}}\langle B_Ex,B_Ey\rangle_E,$$

其中 Lim 表示 Banach 极限。

容易看到，对任 $x,y,z\in X$，及 $a\in R^1$，有

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle,$$
$$\langle ax+y,z\rangle=a\langle x,y\rangle+\langle y,z\rangle$$

（即除了"$\langle x,x\rangle=0\Longrightarrow x=0$"外 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足内积的条件），且

$$\|x\|^2\geqslant\operatorname*{Lim}_{\mathscr{F}}\langle B_Ex,B_Ex\rangle_E=\langle x,x\rangle=\lim_{\mathscr{F}}\|B_Ex\|^2$$
$$\geqslant\lim_{\mathscr{F}}\|A_EB_Ex\|^2C^{-2}\geqslant C^{-2}\|Tx\|^2.$$

即
$$C^{-1}\|Tx\|\leqslant\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|.$$

令 $Y=\{x\in X;\langle x,x\rangle=0\}$，在 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 中取关于 Y 的商空间，且进行完备化，得到空间 H，易见 H 是 Hilbert 空间。

令 $A:(X,\|\cdot\|)\longrightarrow H$，$Ax=x+Y$，则

$$\|Ax\|\leqslant\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|,\ \forall x\in X.$$

故 $\|A\|\leqslant 1$。

令 $B_1: AX \longrightarrow Y$，$B_1Ax = Tx$，因为 $Ax_1 = Ax_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in Y \Longrightarrow Tx_1 = Tx_2$，故 B_1 是可以定义的，且

$$\|B_1Ax\| = \|Tx\| \leqslant C\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

从而 $\|B_1Ax\| = \|Tx\| \leqslant C\|Ax\|$，即 $\|B_1\| \leqslant C$。

又因 $H = AX \oplus M$，对某个 $M \subset H$（因为 Hilbert 空间每个闭子空间 1 可补），令 $B: H \longrightarrow Y$，

$$B(Ax, m) = B_1Ax,\quad \forall (Ax, m) \in H,$$

则 $\|B(Ax,m)\| = \|B_1Ax\| \leqslant C\|Ax\| \leqslant C\|Ax + m\| = C\|(Ax, m)\|$，从而 $\|B\| \leqslant C$，且 $BAx = Tx$，即 T 因子分解通过 Hilbert 空间，且 $r_2(T) \leqslant C$。证毕。

下面我们再给出 $T \in \Gamma_2(X, Y)$ 的一些充要条件。

引理 5.3.11 若 $T \in L(X, Y)$ 则

$T \in \Gamma_2(X, Y) \Longleftrightarrow \exists$ 常数 C，使得对任 $(x_j)_{j=1}^n$，$(z_i)_{i=1}^m \subset X$，$(z_i)_{i=1}^m < (x_j)_{j=1}^n$，有

$$\sum_{i=1}^m \|Tz_i\|^2 \leqslant C^2 \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

且 $r_2(T)$ 与满足上述不等式的最小常数 C 一致。

证明 “$\Longleftarrow$” 由引理 5.3.10 知，只须假设 X 是有限维空间即可。注意，这时 $K = S(X^*) = \{x^* \in X^*, \|x^*\| = 1\}$ 是紧的。

令 $C(K) = \{f: K \longrightarrow R^1$ 是连续函数；$\|f\| = \max\limits_{k \in K}|f(k)|\}$

令 $C_- = \{\varphi \in C(K); \sup\varphi(K) < 0\}$，则 C_- 是 $C(K)$ 中开凸集。

令 $S = \{\varphi_{(x_1,\cdots,x_n; z_1,\cdots,z_m)}(x^*)$

$$= \sum_{i=1}^m |x^*(z_i)|^2 - \sum_{j=1}^n |x^*(x_j)|^2;$$

$$\sum_{i=1}^m \|Tz_i\|^2 > C^2 \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\}.\ \text{且约定 } O \in S.$$

由假设知，对任 $\varphi \in S$，$\sup\varphi(K) \geqslant 0$，故 $S \cap C_- = \phi$，容易验证 S 是凸锥，由 Hahn-Banach 定理，S 与 C_- 可用 $\mu_0 \in C(K)^*$ 分离，即

$$\mu_0|_S \geqslant \alpha \geqslant \mu_0|_{C_-}.$$

由于 S 为凸锥，故 $\alpha=0$，即 $\mu_0|_S\geqslant 0\geqslant \mu_0|_{C_-}$，即存在 K 上正的正则 Borel 测度 μ_0，使

$$\int_K \varphi(x^*)d\mu_0 \geqslant 0,\quad \forall \varphi\in S.$$

对任 $x\in X$，令 $\hat{x}(x^*)=x^*(x)$，$\forall x^*\in K$，则 $\hat{x}\in C(K)$。

若 $x,z\in X$，使得 $C\|x\|\leqslant\|Tz\|$，则

$$\varphi(x,z)(x^*)=|\hat{z}(x^*)|^2-|\hat{x}(x^*)|^2\in S,$$

从而

$$\int_K |\hat{z}(x^*)|d\mu_0\leqslant\int_K|\hat{x}(x^*)|d\mu_0.$$

令 $a=\sup\left\{\left(\int_K |\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_0\right)^{\frac{1}{2}};\ \|x\|\leqslant 1\right\}$，则$a>0$。事实上，否则 $a=0$，由此得$\int_K |\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_0=0$，$\forall x\in X$，从而对任 $x\in X$，$x^*\in S(X^*)$，$|\hat{x}(x^*)|=0$，矛盾！

于是，我们得到，如果 $z\in X$，使得 $C<\|Tz\|$，则

$$\int_K|\hat{z}(x^*)^2 d\mu_0\geqslant a^2.$$

令 $\mu_1=\dfrac{C^2}{a^2}\mu_0$，则 μ_1 是 K 上正的正则 Borel 测度，且若 $z\in X$，使得$\|Tz\|>C$，则

$$\left(\int_K|\hat{z}(x^*)|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant C.$$

由齐性知，对任 $x\in X$，有

$$\left(\int_K|\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\|Tx\|.$$

但另一方面，对任 $x\in X$，

$$\left(\int_K |\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{C}{a}\left(\int_K |\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_0\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\|x\|,$$

故

$$\|Tx\| \leqslant \left(\int_K |\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|x\| \quad \forall x \in X.$$

令 $H = \overline{\{\hat{x}; x \in X\}}^{L_2(K,\mu_1)}$，即 H 是 $\{\hat{x};\ x \in X\}$ 在 $L_2(K, \mu_1)$ 中闭包。则 H 是 Hilbert 空间，且

$$\|\hat{x}\|_H = \left(\int_K |\hat{x}(x^*)|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in X,$$

定义 $B: X \longrightarrow H, Bx = \hat{x}; A: H \longrightarrow Y,\ A\hat{x} = Tx$，则我们看到

$$\|B\| \leqslant C,\ \ \|A\| \leqslant 1,\ \ Tx = ABx,$$

这表明 $T \in \Gamma_2(X, Y)$，且 $r_2(T) \leqslant C$。证毕。

"$\Longrightarrow$" 设 $T \in \Gamma_2(X, Y)$，则对任何 $\varepsilon > 0$，存在一个 Hilbert 空间 H 及 $B \in L(X, H), A \in L(H, X)$，使 $T = AB$，

$$\|A\| \cdot \|B\| \leqslant r_2(T) + \varepsilon.$$

任取 $(z_i)_{i=1}^m$，$(x_j)_{j=1}^n \subset X$，使 $(z_i)_{i=1}^m < (x_j)_{j=1}^n$，令 $Bz_i = z_i'$，$1 \leqslant i \leqslant m; Bx_j = x_j', 1 \leqslant j \leqslant n$，则对每个 $h^* \in H^*$，

$$\sum_{i=1}^m |h^* z_i'|^2 = \sum_{i=1}^m |h^* B z_i|^2 = \sum_{i=1}^m |B^* h^* z_i|^2$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n |B^* h^* x_j|^2 = \sum_{j=1}^n |h^* B x_j|^2 = \sum_{j=1}^n |h^* x_j'|^2$$

即在 H 中 $(z_i')_{i=1}^m < (x_j)_{j=1}^n$。

令 (e_α) 是 H 中正规化正交基，则对任 $h \in H$，有

$$\|h\|^2 = \sum_\alpha |\langle e_\alpha, h\rangle|^2,\ \text{故}$$

$$\sum_{i=1}^m \|z_i'\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_\alpha |\langle e_\alpha, z_i'\rangle|^2$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \sum_\alpha |\langle e_\alpha, x_j'\rangle|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j'\|^2,$$

从而

$$\sum_{i=1}^m \|Tz_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \|ABz_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \|Az_i'\|^2$$

$$\leqslant \|A\|^2 \sum_{i=1}^m \|z_i'\|^2 \leqslant \|A\|^2 \sum_{j=1}^n \|x_j'\|^2$$

$$\leqslant \|A\|^2\|B\|^2 \sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2$$

$$\leqslant (r_2(T)+\varepsilon)^2 \sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2.$$

由 ε 任意性，得

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\|Tz_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant r_2(T)\left(\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

这样就证得必要性，且 $C\leqslant r_2(T)$。证毕。

推论 5.3.12 若 $T\in L(X,Y)$，则

$T\in \Gamma_2(X,Y)\Longleftrightarrow$ 存在常数 C，使得对一切 $n\times n$ 正交矩阵 (a_{ij})，任何 $(x_j)_{j=1}^{n}\subset X$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Tx_j\right\|^2\leqslant C^2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2,$$

且此时，$r_2(T)$ 与满足上述不等式的最小常数 C 一致。

证明　由引理 5.3.11 知，只须证明：存在常数 C_1，使得对任 $(x_j)_{j=1}^{n}$，$(z_i)_{i=1}^{m}\subset X$，$(z_i)_{i=1}^{m}<(x_j)_{j=1}^{n}$，有

$$\sum_{i=1}^{m}\|Tz_i\|^2\leqslant C^2\sum_{j=1}^{n}\|x\|^2,$$

当且仅当存在常数 C_2，使得对一切 $n\times n$ 正交矩阵 (a_{ij})，任 $(x_j)_{j=1}^{n}\subset X$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Tx_j\right\|^2\leqslant C_2^2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

且 $C_1=C_2$。

"$\Longrightarrow$" 任取 $n\times n$ 正交矩阵 (a_{ij})，任取 $(x_j)_{j=1}^{n}\subset X$，令 $z_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，$1\leqslant i\leqslant n$，由于 (a_{ij}) 是正交矩阵，故对任 $x^*\in X^*$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|x^*(z_i)|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x^*(x_j)\right|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^2,$$

从而 $(z_i)_{i=1}^{n}<(x_j)_{j=1}^{n}$，由假设条件知，

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tz_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}Tx_{ij}\right\|^2\leqslant C_1^2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

"$\Longleftarrow$" 任取$(x_j)_{j=1}^{n}$，$(z_i)_{i=1}^{m}\subset X$，使得$(z_i)_{i=1}^{m}<(x_j)_{j=1}^{n}$，如果必要，可添加 0 元，不妨设 $n=m$，即

$$(z_i)_{i=1}^{n}<(x_i)_{i=1}^{n}.$$

由引理 5.3.9 知，存在$n\times n$矩阵(a_{ij})，使得对一切$(b_j)_{j=1}^{n}\in R^n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2,$$

且 $z_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，$1\leqslant i\leqslant n$。

令 $B_n=\Big\{n\times n$ 矩阵(a_{ij})；使$z_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，$1\leqslant i\leqslant n$，且对任何$(b_j)_{j=1}^{n}\in R^n$，有 $\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2\Big\}$，则 B_n 是由 $n\times n$ 矩阵组成的空间中的非空有界闭凸集（从而是紧凸集），由 Krien-Milman 定理，$\mathrm{ext}B_n\neq\phi$，但是大家知道，B_n 中正交矩阵是 $\mathrm{ext}B_n$ 中元（反之亦然）。（在复的情况为酉矩阵），故存在正交矩阵$(a_{ij}^0)\in B_n$，即$z_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0x_j$，$1\leqslant i\leqslant n$，且对任$(b_j)_{j=1}^{n}\in R^n$，

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0b_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2.$$

由假设条件，

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tz_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0x_j\right\|^2\leqslant C_2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

这就证得充分性，且 $C_1=C_2$。证毕。

定理 5.3.6 的证明　只须证必要性，由推论 5.3.12，只须证明，存在常数 C，使得对一切 $n\times n$ 正交矩阵(a_{ij})，对任$(x_i)_{i=1}^{n}\subset X$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}STx_j\right\|^2\leqslant C^2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

任取 $n\times n$ 正交矩阵(a_{ij})，$(x_j)_{j=1}^n\subset X$，由于$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}g_j\right)_{i=1}^n$ 与 $(g_i)_{i=1}^n$ 具相同分布及 T 为 type 2，S 为 cotype 2，再由定理 5.3.8 知，

$$\begin{aligned}
&(Ct_2(S))^{-2}\sum_{i=1}^n\left\|\sum_{j=1}^n a_{ij}S(Tx_j)\right\|^2\\
&\leqslant\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)\sum_{j=1}^n a_{ij}Tx_i\right\|^2dP\\
&=\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(\omega)\right)Tx_i\right\|^2dP\\
&=\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)Tx_i\right\|^2dP\leqslant\left(t_2(T)\right)^2\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2,
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=1}^n\left\|\sum_{j=1}^n a_{ij}(STx_{ij})\right\|^2\leqslant\left(Ct_2(S)t_2(T)\right)^2\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2.$$

从而 $ST\in\Gamma_2(X,Z)$，且 $r_2(ST)\leqslant Ct_2(S)t_2(T)$。

证毕。

推论 5.3.13 若 X 是 type 2，Y 是 cotype 2，则对每个 $S\in L(X,Y)$，因子分解通过 Hilbert 空间，

证明 由于 X 是 type 2，故恒等算子 $I_X:X\longrightarrow X$ 是 type 2，且因 Y 是 cotype 2，故 $S:X\longrightarrow Y$ 是 cotype 2。从而 $S=SI_X$ 因子分解通过 Hilbert 空间。证毕。

定理 5.3.14 若 X 是 Banach 空间，则

$H\approx$Hilbert 空间当且仅当对任意$(x_i)_{i=1}^\infty$，有

$$\sum_{i=1}^\infty r_i(t)x_i\overset{\text{a.e}}{<}+\infty\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|^2<+\infty.$$

证明 由定理 5.3.6 及定理 5.3.5 注(2)即知，证毕。

§4 B 凸 Banach 空间

众所周知，1695 年 J.Bernoulli 发现了大数定律（称为弱大数定律），即若$(x_j(\omega))_{j=1}^\infty$ 是一列独立均值为 0（即数学期望为 0，

$\int_\Omega x_i(\omega)dP=0$)的实值随机变量，满足

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |f_i(\omega)|^2 dP=0,$$

则 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)\right)_{n=1}^{\infty}$ 测度收敛(即度量收敛)于 0。

所谓强大数定律，即若 $(x_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立均值为 0 的实值随机变量，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_\Omega |x_n(\omega)|^2 dP<+\infty,$$

则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(\omega)\xrightarrow{a.e}0$。

那么，如果$(x_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$是一列取值为 Banach 空间的随机变量，是否仍有相应的"大数定律"成立呢？A.Beck(B-1)，1962 年引入了 B 凸 Banach 空间概念，并且证明 B 凸空间可以由某种大数定律成立来刻划。本节先给出 B 凸空间的一些等价条件，然后证明它与大数定律及 type 的关系。

我们在第三章中定义 3.1.20 已给出 B 凸空间定义。这里我们再给出 B 凸的定义

定义 5.4.1 设 n 为正整数，$n\geq 2$，$\varepsilon>0$，Banach 空间 X 称为 $B(n,\varepsilon)$凸的，如果

$$\sup\{\min\|x_1\pm x_2\pm\cdots x_n\|;\ (x_i)_{i=1}^{n}\subset U(X)\}<n(1-\varepsilon).$$

Banach 空间 X 称为 B 凸的，如果 X 是 $B(n,\varepsilon)$凸的，对某个正整数 $n\geq 2$，$\varepsilon>0$。

注 定义 3.1.19 中 X 称一致非 $l_1(n)$，如果它是 $B(n,\varepsilon)$凸的，对某个 $\varepsilon>0$。因此定义 3.1.20 与定义 5.4.1 是一致的。□

定义 5.4.2 Banach 空间 X 称为一致含 l_1^n，如果存在$M\geq 1$，使得对任何正整数 n，存在 X 的 n 维子空间 $Y_n\subset X$，使 $d(Y_n, l_1^n)\leq M$，其中 $d(\cdot,\cdot)$为 Banach–Mazur 距离。

下面我们证明 X 一致含 l_1^n 的充要条件是 l_1 在 X 中有有限表

示，即对任何正整数 n，$\varepsilon>0$，存在 X 的 n 维子空间 X_n，使 $d(l_1^n, X_n)<1+\varepsilon$。为此，我们需要一些引理以及引入某些定义。

引理 5.4.1 若 B 是 Banach 空间，$\dim B=n^2$，且 $d(B, l_1^{n^2})\leqslant M^2$，则存在 B 的 n 维子空间 C，使

$$d(C, l_1^n)\leqslant M.$$

证明 令 $T: l_1^{n^2}\longrightarrow B$ 是线性同胚，

$$M^{-1}\|u\|\leqslant\|Tu\|\leqslant M\|u\|,\quad \forall u\in l_1^{n^2}.$$

令 $(e_k)_{k=1}^{n^2}$ 为 $l_1^{n^2}$ 的自然基，下面分两种情况讨论。

(1) 如果，对某个 k，$1\leqslant k\leqslant n$，有

$$d([Te_i]_{i=(k-1)n+1}^{kn},\ l_1^n)\leqslant M.$$

则定理成立。

(2) 否则，对每个 k，$1\leqslant k\leqslant n$，存在 $u_k\in[e_i]_{i=(k-1)n+1}^{kn}$，使得

$$\|Tu_k\|<\|u_k\|=1.$$

从而对任何 $(a_k)_{k=1}^n$，由于 $(u_k)_{k=1}^n$ 的支撑互不相交（即 u_k 关于 $[e_i]_{i=1}^{n^2}$ 的坐标不相交），因此

$$M^{-1}\sum_{i=1}^n|a_i|=M^{-1}\left\|\sum_{i=1}^n a_iu_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n a_iTu_i\right\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i|\,\|Tu_i\|<\sum_{i=1}^n|a_i|.$$

故 $d([Tu_k]_{k=1}^n, l_1^n)\leqslant M$，故定理仍然成立。证毕

定义 5.4.3 设 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，$1\leqslant a<+\infty$，Banach 空间 X 称为 $\mathscr{L}_a^p$ 空间，如果对 X 的任何有限维子空间 E，存在 X 有限维子空间 F，使 $E\subset F$，且 $d(E, l_p^n)\leqslant a$，其中 $n=\dim F$。

Banach 空间 X 称为 $\mathscr{L}_{a+}^p$，如果对一切 $a'>a$，X 是 $\mathscr{L}_{a'}^p$ 空间。

Banach 空间 X 称为 $\mathscr{L}^p$ 空间，如果 X 是一个 $\mathscr{L}_a^p$ 空间，对某个 $1\leqslant a<+\infty$。

注 从定义看到，从“局部观点”（即考虑有限维空间的一致性质的观点）来看 $\mathscr{L}^p$ 空间基本上与 l_p 是一致的。□

引理 5.4.2 设 X 是 Banach 空间，$(E_r)_{r\in\Gamma}$ 是 X 的上有向的有限维子空间族，即对任 $r_1, r_2\in\Gamma$，存在 $r_3\in\Gamma$ 使 $E_{r_1}\subset E_{r_3}$，$E_{r_2}\subset E_{r_3}$。且 $(E_r)_{r\in\Gamma}$ 的并在 X 中稠，即 $X=\overline{\bigcup_{r\in\Gamma}E_r}$，则对任何 $\lambda>1$，任何 $Y\subset X$，$\dim Y<+\infty$，存在 X 的有限维子空间 Z，使 $Y\subset Z$，且 $d(Z,E_r)\leqslant\lambda$，对某个 $r\in\Gamma$。

证明　任取 $Y\subset X$，$\dim Y=n$。

取 $(y_i)_{i=1}^n\subset S(Y)$，$(y_i^*)_{i=1}^n\subset S(Y)$，$y_i^*(y_j)=\delta_{ij}$（根据 Aucrbach 定理(引理 4.2.2)）。

对任何 $y\in Y$，我们有

$$\sum_{i=1}^n|y_i^*(y)|\leqslant n\cdot\max_i|y_i^*(y)|\leqslant n\|y\|.$$

由于 $X=\overline{\bigcup_{r\in\Gamma}E_r}$，及 $(E_r)_{r\in\Gamma}$ 是上有向的，因此，对任意小的 $\varepsilon>0$，存在 E_{r_0}，及 $(x_1,\cdots,x_n)\subset E_{r_0}$，使

$$\|x_i-y_i\|\leqslant\varepsilon,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

且 $(x_i)_{i=1}^n$ 线性无关（事实上，否则可选 $(x_1^m,\cdots,x_n^m)\subset E_{r_m}$，$(a_i^m)_{i=1}^n$ 不全为 0，使 $\|x_i^m-y_i^m\|<\frac{1}{m}$，$\sum_{i=1}^n a_i^m x_i^m=0$，由于 $(a_i^m)_{i=1}^n$ 不全为 0，故 $\sum_{i=1}^n|a_i^m|\neq0$。令 $b_i^m=-\frac{a_i^m}{\sum_{i=1}^n|a_i^m|}$，$1\leqslant i\leqslant n$，则 $(b_i^m)_{i=1}^n\equiv b_m\in S(l_1^n)$，且 $\sum_{i=1}^n b_i^m x_i^m=0$，$\forall m$。因为 $x_i^m\longrightarrow y_i$，$m\longrightarrow\infty$，$1\leqslant i\leqslant n$。且存在 $(b_m)_{m=1}^\infty$ 的子列（仍记作 $(b_m)_{m=1}^\infty$），使 $\|b_m-b\|\longrightarrow0$，对某个 $b=(b_i)_{i=1}^n\in S(l_1^n)$，因而 $\sum_{i=1}^n b_i y_i=0$，这与 $(y_i)_{i=1}^n$ 是线性无关的矛盾！）

令 $T_0:[x_i]_{i=1}^n\longrightarrow[y_i]_{i=1}^n$，$T_0\sum_{i=1}^n a_i x_i=\sum_{i=1}^n a_i y_i$，

则 $\left\|T_0\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|+\sum_{i=1}^n|a_i|\,\|x_i-y_i\|$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| + n\varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\|,$$

从而

$$(1 - n\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

另一方面，

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| + \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, \|x_i - y_i\|$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon n) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\|$$

故

$$\frac{1}{1+\varepsilon n} \|x\| \leqslant \|T_0 x\| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon n} \|x\|, \quad \forall x \in [x_i]_{i=1}^{n}.$$

$$\text{令 } P: E_{r_0} \longrightarrow [x_i]_{i=1}^{n}, \quad P x_r = \sum_{i=1}^{n} \widehat{T_0^* y_i^*}(x_r) x_i, \quad \forall x_r \in E_{r_0},$$

其中 $\widehat{T_0^* y_i^*}$ 是 $T_0^* y_i^* \in ([x_i]_{i=1}^{n})^*$ 到 E_{r_0} 上的保范延拓，则

$$\|P x_r\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \widehat{T_0^* y_i^*}(x_r) x_i \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |\widehat{T_0^* y_i^*}(x_r)|$$

$$\leqslant n(1+\varepsilon) \max_i |\widehat{T_0^* y_i^*}(x_r)| \leqslant \frac{n(1+\varepsilon)}{1 - \varepsilon n} \|x_r\|.$$

故 P 是有界投影，且 $\|P\| \leqslant \dfrac{n(1+\varepsilon)}{1 - \varepsilon n}$.

令 $(x_{n+1}, \cdots, x_{n+p})$ 是 $\mathrm{Ker}(P)$ 的单位向量组成的基。

令 $Z = [y_1, \cdots, y_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p}]$,

定义

$$T: Z \longrightarrow E_{r_0}, \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j},$$

其中 $z = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j} \in Z$。我们有

$$\|Tz\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j} \right\| < \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j} \right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$\leqslant \|z\| + \varepsilon n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \leqslant \|z\| + \frac{n\varepsilon}{1-n\varepsilon}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

$$\leqslant \|z\| + \frac{n\varepsilon}{1-n\varepsilon}\cdot\frac{n(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon n}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j}\right\|$$

$$= \|z\| + \frac{n\varepsilon}{1-n\varepsilon}\cdot\frac{n(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon n}\|Tz\|,$$

即 $\left(1-\frac{n^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-n\varepsilon)^2}\right)\|Tz\|\leqslant\|z\|$。

另一方面，

$$\|z\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{p} b_j x_{n+j}\right\| \leqslant \|Tz\| + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}|a_i|$$

$$\leqslant \|Tz\| + \frac{n^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-n\varepsilon)^2}\|Tz\|,$$

故

$$\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1+\dfrac{n^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-n\varepsilon)^2}}{1-\dfrac{n^2\varepsilon(1+\varepsilon)}{(1-n\varepsilon)^2}}\equiv 1+\lambda.$$

即 $d(Z,E_{r_4})\leqslant 1+\lambda$, $Y\subset Z$。当 ε 任意小时，λ 也任意小。证毕。

定理 5.4.3 设 $1\leqslant p<+\infty$，则 l_p, L_p 是 $\mathscr{L}_{1+}^{p}$ 空间。

证明 由引理 5.4.2，考虑到 $l_p=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} l_p^n}$，知 l_p 是 $\mathscr{L}_{1+}^{p}$ 空间。

对 L_p，由于有限个具不相交支撑的可测的特征函数张成的子空间族在 L_p 中稠，即得所要结论。证毕。

注 同样易见 c_0 是 $\mathscr{L}_{1+}^{\infty}$ 空间。也可证明 C(K) 是 $\mathscr{L}_{1+}^{\infty}$ 空间，其中 K 是紧 Hausdorff 空间。□

定理 5.4.4 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) X 是 B 凸的；

(2) l_1 不能在 X 中有有限表示；

(3) X 不一致含 l_1^n。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 若 l_1 在 X 中有有限表示，则对任何正整数 n 及 $\varepsilon>0$，存在 $X_n\subset X$, $\dim X_n=n$，使 $d(X_n,l_1^n)<1+\varepsilon$。

令 $T: l_1^n \longrightarrow X_n$。

$$(1-\delta)\|y\| \leqslant \|Ty\| \leqslant (1+\delta)\|y\|, \forall y \in l_1^n,$$

其中 $\frac{1+\delta}{1-\delta} < 1+\varepsilon$。

特别取 $y_i = e_i$，其中 $(e_i)_{i=1}^n$ 为 l_1^n 的自然基。则

$$(1-\delta) \leqslant \|Te_i\| \leqslant 1+\delta, \quad 1 \leqslant i \leqslant n。$$

令 $x_i = \frac{Te_i}{\|Te_i\|}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则 $\|x_i\| = 1, 1 \leqslant i \leqslant n$。

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{Te_i}{\|Te_i\|}\right\| \geqslant (1-\delta)\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{e_i}{\|Te_i\|}\right\|$$

$$= (1-\delta)\sum_{i=1}^n \|Te_i\| \geqslant n\frac{1-\delta}{1+\delta},$$

其中 $\varepsilon_i = \pm 1$。

故 $$\min\left(\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|; \varepsilon_i = \pm 1\right) \geqslant n\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right) \geqslant n\frac{1}{1+\varepsilon}。$$

所以，X 不是 B 凸的。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(1) 若对任何正整数n，任 $\varepsilon>0$，存在$(x_i)_{i=1}^n \subset S(X)$，使

$$\min\left(\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|; \varepsilon_i = \pm 1\right) > n(1-\varepsilon)。$$

取 $(a_i)_{i=1}^n \subset R^1$，$\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$，则

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i| = 1。$$

令 $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(a_i)$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则

$$n(1-\varepsilon) \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(1-|a_i|)x_i + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n (1-|a_i|) + \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|$$

$$= n-1+\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|,$$

从而

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \geqslant 1 - n\varepsilon,$$

即
$$1 - n\varepsilon \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant 1,$$

利用齐性，得到对任$(a_i)_{i=1}^n \subset R^1$，有

$$(1 - n\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|,$$

故 $d([x_i]_{i=1}^n, l_1^n) < \frac{1}{1 - n\varepsilon}$，即 l_1 在 X 中有有限表示，证毕。

(3)$\Longrightarrow$(2) 若 l_1 在 X 中有有限表示，则对任正整数 n，$\exists X$ 的 n 维子空间 X_n，使

$$d(l_1^n, X_n) \leqslant 2.$$

即 X 一致含 l_1^n。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3) 若 X 一致含 l_1^n，任取 l_1 的 n 维子空间 Y，$\varepsilon > 0$，由引理5.4.3知，l_1 是 $\mathscr{L}_+$ 空间，故有 l_1 的 m 维子空间 Z，使 $Y \subset Z$，且 $d(Z, l_1^m) < 1 + \varepsilon$。

由于 X 是一致含 l_1^n，故存在 X 的子空间 X_1，使

$$d(X_1, l_1^{m^k}) < M,$$

其中 k 是正整数，使得$M^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$。

重复应用引理5.4.1，得到 X 的子空间 X_k，使

$$d(X_k, l_1^m) < M^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon.$$

利用 Banach-Mazur 距离的性质，有

$$d(Z, X_k) \leqslant d(Z, l_1^m) d(l_1^m, X_k) < (1 + \varepsilon)^2.$$

由于 $Y \subset Z$，立即知 $d(Y, X_0) < (1 + \varepsilon)^2$，对某个 $X_0 \subset X$，这表明 l_1 在 X 中有有限表示。证毕。

现在我们证明 X 是 B 凸的，当且仅当 X 是 type p，对某个 $1 < p \leqslant 2$。为此，我们需要若干记号及引理。

对任 $n \geqslant 1$，令

$$\lambda_n = \sup\left\{ \frac{\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|^2 dt}{\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}};\right.$$

$$\left. (x_i)_{i=1}^n \subset X,\ \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \neq 0 \right\}。$$

引理 5.4.5 λ_n 如上定义，则

(1) $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$；

(2) 若 $1 \leqslant m \leqslant n$，则 $\lambda_m\sqrt{m} \leqslant \lambda_n\sqrt{n}$；

特别地，$n^{\frac{1}{2}} \leqslant \lambda_n$。

(3) 若 $n, k \geqslant 1$，则 $\lambda_{nk} \leqslant \lambda_n\lambda_k$。

证明 (1) 由于对任$(a_i)_{i=1}^n \subset R^1$，

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n a_i^2,$$

且对任$(x_i)_{i=1}^n \subset X$，

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|^2 dt = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2.$$

故

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1}\left(\sum_{i=1}^n \|\varepsilon_i x_i\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而 $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$。证毕。

(2) 若 $m \leqslant n$，则

$$\lambda_m\sqrt{m} = \sup\left\{ \frac{\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m r_i(t)x_i \right\|^2 dt}{\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}};\ (x_i)_{i=1}^m \subset X \right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\frac{\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2 dt}{\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}};\ (x_i)_{i=1}^{n}\subset X\right\}$$

$$=\lambda_n\sqrt{n}.$$

因为 $\lambda_1=1$，故特别有 $1=\lambda_1\sqrt{1}\leqslant\lambda_n\sqrt{n}$。

(3) 取 $(x_s)_{s=1}^{nk}\subset X$,

令 $X_i(\theta)=\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} r_j(\theta)x_j$，$\theta\in[0,1]$，$i=1,\cdots,n$。

(其中 $(r_j(\theta))$ 为 Rademacher 函数组)。

由 λ_n 定义，对任何 $\theta\in[0,1]$，

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)X_i(\theta)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\|X_i(\theta)\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

对上式关于 θ 积分，得到

$$\left(\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)X_i(\theta)\right|^2 dtd\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sqrt{n}\lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\|X_i(\theta)\|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sqrt{n}\lambda_n\sqrt{k}\lambda_k\left(\sum_{s=1}^{kn}\|x_s\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

但是，

$$\int_0^1\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)X_i(\theta)\right\|^2 dtd\theta$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} r_j(\theta)x_j\right\|^2 dtd\theta$$

$$=\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{nk} r_i(t)x_i\right\|^2 dt.$$

故

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{nk} r_i(t)x_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\lambda_n\sqrt{k}\lambda_k\left(\sum_{i=1}^{kn}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而 $\lambda_{nk}\leqslant\lambda_n\cdot\lambda_k$。证毕。

引理 5.4.6 若 $\lambda_N=1$，则对任 $\varepsilon>0$，存在 $Y\subset X$，使 $\dim Y=N$，且

$$d(Y,l_1^N)<1+\varepsilon.$$

证明 设 $\lambda_N=1$，则对任 $\varepsilon>0$，存在 $(x_i)_{i=1}^N\subset X$，使

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^N r_i(t)x_i\right\|^2dt\geqslant(1-\varepsilon)N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2.$$

即

$$\frac{1}{2^N}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^N\varepsilon_ix_i\right\|^2\geqslant(1-\varepsilon)N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2.$$

当 $\varepsilon<\frac{1}{4^N}$ 时，我们还有

$$\min\left\{\left\|\sum_{i=1}^N\varepsilon_ix_i\right\|^2;\ \varepsilon_i=\pm1\right\}\geqslant(1-\sqrt{\varepsilon})N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2.$$

事实上，否则存在 $\varepsilon_i=\pm1$，使

$$\left\|\sum_{i=1}^N\varepsilon_ix_i\right\|^2\leqslant(1-\sqrt{\varepsilon})N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2.$$

则

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2&\leqslant\frac{1}{2^N}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^N\varepsilon_ix_i\right\|^2\\&\leqslant\frac{1}{2^N}(1-\sqrt{\varepsilon})N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2+\frac{2^N-1}{2^N}\left(\sum_{i=1}^N\|x_i\|\right)^2\\&\leqslant\frac{1}{2^N}(1-\sqrt{\varepsilon})N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2+\frac{2^N-1}{2^N}N\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2.\end{aligned}$$

故

$$(1-\varepsilon)\leqslant\frac{1}{2^N}(1-\sqrt{\varepsilon})+\frac{2^N-1}{2^N}.$$

即 $\qquad 2^N-2^N\varepsilon\leqslant1-\sqrt{\varepsilon}+2^N-1,$

故 $\qquad \sqrt{\varepsilon}\leqslant2^N\varepsilon$，这与 $\varepsilon<\frac{1}{4^N}$ 矛盾！

令 $\qquad a^2=\sum_{i=1}^N\|x_i\|^2$，$y_i=\frac{\sqrt{N}}{a}x_i$，$1\leqslant i\leqslant N$。则

$$\sum_{i=1}^{N} \|y_i\|^2 = \frac{N}{a^2}\sum_{i=1}^{N}\|x_i\|^2 = N,$$

且对任何 $\varepsilon_i = \pm 1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i y_i\right\|^2 = \frac{N}{a^2}\left\|\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i x_i\right\|^2 \geqslant \frac{N}{a^2}(1-\sqrt{\varepsilon})Na^2$$

$$= N^2(1-\sqrt{\varepsilon}), \quad (5.12)$$

令 $\|y_{i_0}\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\|y_i\|$, $\|y_{j_0}\| = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\|y_i\|$, 则

$$(1-\sqrt{\varepsilon})N^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i\right\|^2 \leqslant N^2\|y_{i_0}\|^2,$$

$$N = \sum_{i=1}^{N}\|y_i\|^2 \geqslant N\|y_{j_0}\|$$

因而 $\|y_{i_0}\| \geqslant (1-\varepsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$, $\|y_{j_0}\| \leqslant 1$.

从而，由(5.12)式,

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}(\|y_i\| - \|y_j\|)^2 = N\sum_{i=1}^{N}\|y_i\|^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}\|y_i\|\right)^2$$

$$\leqslant N^2 - \left\|\sum_{i=1}^{N} y_i\right\|^2 \leqslant N^2 - (1-\varepsilon^{\frac{1}{2}})N^2 = \varepsilon^{\frac{1}{2}}N^2.$$

因此,对 $1\leqslant i,j\leqslant N$,有

$$|\|y_i\| - \|y_j\|| > 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N,$$

特别地,对 $1\leqslant i\leqslant N$,

$$|\|y_i\| - \|y_{i_0}\|| < 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N,$$

故 $(1-\varepsilon^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N \leqslant \|y_{i_0}\| - 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N \leqslant \|y_i\|$

$$\leqslant \|y_{i_0}\| + 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N \leqslant \|y_{j_0}\| + 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N + 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N \leqslant 1 + 2^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}N, \quad (5.13)$$

结合(5.12)和(5.13)式,及 ε 任意性知,对任何 $\delta>0$,存在 $(y_i)_{i=1}^N$,使

$$\min\left(\left\|\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \frac{y_i}{\|y_i\|}\right\|;\ \varepsilon_i = \pm 1\right) > N(1-\delta).$$

由定理 5.4.4 的(2)$\Longrightarrow$(1)证明知,对任何 $\delta>0$,存在 $(y_i)_{i=1}^N$, 使

$$d([y_i]_{i=1}^N, l_1^N) < 1+\delta.$$

证毕。

现在我们可以证明下面命题。

定理 5.4.7 若 X 是 Banach 空间，则

X 是 B 凸的，当且仅当 X 是 type p，对某个 $1<p\leqslant 2$。

证明 "$\Longleftarrow$" 若 X 不是 B 凸的，则由定理 5.4.4 知，l_1 在 X 中有有限表示，因为 l_1 不是任何 type p，$1<p\leqslant 2$，故易见(因type 是超性质)，X 不是任何 type p，$1<p\leqslant 2$。证毕。

"$\Longrightarrow$" 若 X 是 B 凸的，则由定理 5.4.4 知，X 不一致含 l_1^n，由引理 5.4.6 知，对一切 n，$\lambda_n<1$。

固定 N，选 $q\geqslant 2$，使 $\lambda_N=N^{-\frac{1}{q}}$。

由引理 5.4.5 知，对正整数 $k\geqslant 1$，有

$$\lambda_{N^k}\leqslant\lambda_N\cdots\lambda_N=N^{-\frac{k}{q}}.$$

令 $1<p\leqslant 2$，使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。下面，我们证明 X 是 type r，对每个 $1<r<p\leqslant 2$。

由 type r 的定义知，只须证明，存在 $M>0$，使得对任 $(x_i)_{i=1}^n\subset X$，有

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

令
$$A_k=\left\{i;\left(\frac{\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r}{N^{k+1}}\right)^{\frac{1}{r}}<\|x_i\|\leqslant\left(\frac{\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r}{N^k}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}$$

记 $\bar{\bar{A}}_k$ 为 A_k 的基数，$k=0,1,2\cdots$。

由于对每个 i，$1\leqslant i\leqslant n$，有

$$\|x_i\|\leqslant\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

且当 $k\longrightarrow+\infty$ 时，

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r}{N^k}\right)\longrightarrow 0,$$

故$\{1,2,\cdots,n\}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_k$。

又由于

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\geqslant\left(\sum_{j\in A_k}\|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\geqslant\left(\overline{\overline{A}}_k\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\|x_j\|^r}{N^{k+1}}\right)^{\frac{1}{r}},$$

故 $\overline{\overline{A}}_k\leqslant N^{k+1}$。

由引理 5.4.5,

$$\sqrt{\overline{\overline{A}}_k}\cdot\lambda_{\overline{\overline{A}}_k}\leqslant\sqrt{N^{k+1}}\lambda_{N^{k+1}},$$

故

$$\overline{\overline{A}}_k\lambda_{\overline{\overline{A}}_k}\leqslant N^{k+1}\lambda_{N^{k+1}}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}&=\left(\int_0^1\left\|\sum_{\substack{k\geq 0\\ i\in A_k}}r_i(t)x_i\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\left(\int_0^1\left(\sum_{k\geq 0}\left\|\sum_{i\in A_k}r_i(t)x_i\right\|\right)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\sum_{k\geq 0}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i\in A_k}r_i(t)x_i\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\sum_{k\geq 0}\lambda_{\overline{\overline{A}}_k}\sqrt{\overline{\overline{A}}_k}\left(\sum_{i\in A_k}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\sum_{k\geq 0}\lambda_{\overline{\overline{A}}_k}\sqrt{\overline{\overline{A}}_k}\sqrt{\overline{\overline{A}}_k}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\|x_j\|^r}{N^k}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&=\sum_{k\geq 0}\overline{\overline{A}}_k\lambda_{\overline{\overline{A}}_k}N^{-\frac{k}{r}}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

但是,

$$\sum_{k\geq 0}\lambda_{\overline{\overline{A}}_k}\overline{\overline{A}}_k N^{-\frac{k}{r}}\leqslant\sum_{k\geq 0}N^{k+1}\lambda_{N^{k+1}}N^{-\frac{k}{r}}$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 0} N^{k+1} N^{-\frac{k+1}{q}} N^{-\frac{k}{r}} = \sum_{k\geqslant 0}\left(N^{k+1-\frac{k+1}{q}-\frac{k+1}{r}}\right) N^{-\frac{1}{r}}$$

$$= \sum_{k\geqslant 0} N^{k+1\left(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} \cdot N^{-\frac{1}{r}} < +\infty \quad \left(因1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}<0\right)$$

令 $M = \sum_{k\geqslant 0} N^{k+1\left(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} N^{-\frac{1}{r}}$，则

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

即 X 是 type r，证毕。

注　R.C.James(J-1)给出了一个非自反 type 2 的空间的例子.□

最后，我们给出 B 凸空间的一个概率特征，即某种大数定律成立，为此，我们先证明几个引理。

引理 5.4.8　若 X 是 Banach 空间，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$x_n \longrightarrow 0$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow 0.$$

证明　同数学分析极限定理证明，证毕。

引理 5.4.9　(Kronecker 引理) 若 X 是 Banach 空间，

$$(x_n)\subset X,\ \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1}x_i < +\infty,\ 则 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow 0.$$

证明　首先，我们有(约定当 $i=1$ 时，$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j}x_j = 0$)。

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}x_j - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j}x_j\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}x_j - \sum_{i=1}^{n+1} i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{j}x_j\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}x_j + (n+1)\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}x_j\right)$$

$$= -\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}x_j\right) + \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}x_j.$$

由于当 $n\longrightarrow\infty$ 时，$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}x_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}x_j$，根据定理 5.4.8 易

则当 $n\longrightarrow\infty$ 时，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}x_j\right)\longrightarrow\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}x_j,$$

从而，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x\longrightarrow 0$。 证毕。

定理 5.4.10 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) X 是 B 凸的；

(2) $(x_j(\omega))_{j=1}^{\infty}$ 若是一列 X 值独立随机变量，且 $Ex_j(\omega)=0$，$\sup_j E\|x_j(\omega)\|^2<+\infty$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j(\omega)\xrightarrow{a.e}0;$$

(3) 若 $(x_j)_{j=1}^{\infty}\subset X$，$\sup_j\|x_j\|<+\infty$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\Longrightarrow 0\text{（度量收敛于 0）}。$$

其中，$(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ 是 Rademacher 函数组。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由定理 5.4.7 知，若 X 是 B 凸的，则 X 是type$p$，对某个 $1<p\leqslant 2$，故由定理 5.3.4 知

$$\begin{aligned}E\left\|\sum_{j=n+1}^{n+m}j^{-1}x_j(\omega)\right\|^p&\leqslant K\sum_{j=n+1}^{n+m}j^{-p}E\|x_j(\omega)\|^p\\&\leqslant K\sum_{j=n+1}^{n+m}j^{-p}(E\|x_j(\omega)\|^2)^{\frac{p}{2}}\\&\leqslant KC\sum_{j=n+1}^{\infty}j^{-p}.\end{aligned}$$

其中 K 为某个常数，$C=(\sup_j E\|x_j(\omega)\|^2)^{\frac{p}{2}}$。

因此$\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1}x_j(\omega)$在 $L_p(\mu,X)$中收敛，更有$\sum_{j=1}^{\infty}j^{-1}x_j(\omega)$在$L_1(\mu,X)$中收敛。由于 $\left(\sum_{j=1}^{n}j^{-1}x_j(\omega)\right)_{n=1}^{\infty}$是一个 Martingale，故由定理 2.2.10知，$\left(\sum_{j=1}^{n}j^{-1}x_j(\omega)\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 a.e 收敛的，由 Kronecker 引理（引理5.4.9)知

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(\omega) \xrightarrow{\text{a.e}} 0.$$

证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然。

(3)$\Longrightarrow$(1) 若 X 不是 B 凸的，则可选 $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset U(X)$，使

$$\min\left\{\left\| \sum_{3^k < j \leqslant 3^{k+1}} \varepsilon_j x_j \right\|; \ \varepsilon_j = \pm 1\right\} \geqslant \frac{3}{4}(3^{k+1} - 3^k),$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$,

设 $(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ 为 Rademaher 函数组，则

$$\left\|\sum_{j=1}^{3^k} r_j(t) x_j\right\| \geqslant \left\| \sum_{3^{k-1} < j \leqslant 3^k} r_j(t) x_j\right\| - \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3^{k-1}} \|x_j\|$$

$$\geqslant \frac{3}{4}(3^k - 3^{k-1}) - 3^{k-1} = \frac{1}{2} 3^{k-1},$$

故

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\| \geqslant \frac{1}{6}, \quad \forall t \in [0,1], n = 1, 3, 9, 27, \cdots$$

故 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \not\Longrightarrow 0$（不度量收敛于 0），因为 $\|x_j\| \leqslant 1$，这与条件(3)矛盾！证毕。

§5 q—一致凸和 p—一致光滑空间

大家知道，Banach 空间 X 的凸性模 $\delta(\varepsilon)$ 定义为

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|; \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\},$$

$0 < \varepsilon < 2$，Banach 空间 X 称为一致凸的，如果对任 $0 < \varepsilon < 2$，$\delta(\varepsilon) > 0$（定义 3.1.1）。

同样，Banach 空间 X 的光滑模 $\rho(\tau)$ 定义为

$$\rho(\tau) = \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1; \|x\| = 1, \|y\| \leqslant \tau\right\},$$

$\tau > 0$，Banach 空间 X 称为一致光滑的，如果 $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau} = 0$。

注　这个定义与定义 3.1.26 的等价性请见参考书（俞-1）p.231）。□

Lindenstrauss 证明了下面的定理，它表明 $\delta(\varepsilon)$ 与 $\rho(\tau)$ 的某种对偶关系。为了明确起见，记 $\delta_X(\varepsilon)$，$\rho_X(\tau)$ 分别为 X 的凸性模和光滑模。

定理 5.5.1　对任何 Banach 空间 X，$\tau>0$，

$$\sigma_{X^*}(\tau)=\sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2}-\delta_X(\varepsilon);\ 0<\varepsilon<2\right\}.$$

证明

$$\begin{aligned}2\rho_{X^*}(\tau)&=\sup\{\|x^*+\tau y^*\|+\|x^*-\tau y^*\|-2;x^*,y^*\in U(X^*)\}\\&=\sup\{x^*(x)+\tau y^*(x)+x^*(y)-\tau y^*(y)-2;\\&\qquad x^*,y^*\in U(X^*),x,y\in U(X)\}\\&=\sup\{\|x+y\|+\tau\|x-y\|-2;x,y\in U(X)\}\\&=\sup\{\|x+y\|+\varepsilon\tau-2;x,y\in U(X),\ \|x-y\|=\varepsilon,0<\varepsilon<2\}\\&=\sup\{\tau\varepsilon-2\delta_X(\varepsilon),0<\varepsilon<2\}.\end{aligned}$$

证毕。

推论 5.5.2　若 X 是 Banach 空间 X，则 X 是一致凸的充要条件是 X^* 是一致光滑的。

证明　设 X^* 是一致光滑的，则对每个 ε，$0<\varepsilon<2$，存在 $\tau>0$，使 $\rho_{X_*}(\tau)\leqslant\frac{\tau\varepsilon}{4}$，由定理 5.5.1 知，

$$\frac{\tau\varepsilon}{2}-\delta_X(\varepsilon)\leqslant\frac{\tau\varepsilon}{4},$$

即 $\delta_X(\varepsilon)\geqslant\frac{\tau\varepsilon}{4}$，从而 X 是一致凸的。

反之，设 X 是一致凸的，假设 X^* 不是一致光滑的，则存在 $\tau_n\longrightarrow0$，使

$$\frac{\rho_{x^*}(\tau_n)}{\tau_n}>a\quad 对某个\ a>0,$$

由定理 5.5.1 知，存在 ε_n，$0<\varepsilon_n<2$，使

$$\frac{\varepsilon_n}{2}-\frac{\delta_X(\varepsilon_n)}{\tau_n}>\frac{a}{2}>0.$$

由于 $\delta_X(\varepsilon_n)>0$，故 $\varepsilon_n>a$，$\forall n$，从而 $\varepsilon_n \not\to 0$，但

$$\frac{\tau_n\varepsilon_n}{2}-\frac{\tau_n a}{2}<\delta_X(\varepsilon_n),$$

故 $\delta_X(\varepsilon_n)\longrightarrow 0$，这与 X 是一致凸的矛盾！证毕。

由著名的 James 定理容易证明一致凸空间和一致光滑 空 间是自反的。

James 定理 Banach 空间X是自反的，当且仅当对 每 个 $x^*\in X^*$达到范数，即存在 $x_0\in S(X)$，使 $x^*(x_0)=\|x^*\|$(证明见参考书(俞-1))。

若 X 是 一 致 凸 的。任 取 $x^*\in S(X^*)$，取 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，$x^*(x_n)\longrightarrow 1$，则 $\|x_n+x_m\|\geqslant x^*(x_n+x_m)\longrightarrow 2$，故由于 X 是一致凸的知，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中 Cauchy 列，从 而 存 在 $x_0\in S(X)$，使 $x_n\longrightarrow x_0$，于是 $x^*(x_n)\longrightarrow x^*(x_0)=1$。应用 James 定理知，$X$ 是自反的。由于 X 是自反的当且仅当 X^* 是自反的，由推论 5.5.2 知，一致光滑空间是自反的。这样也得到了如下结论：X 是一致光滑的当且仅当 X^* 是一致凸的。

由于$U(X)$在 $U(X^{**})$中 w^* 稠及范数的 w^* 下半连续性，我们得到

$$\begin{aligned}2\rho_{X^{**}}(\tau)&=\sup\{\|x^{**}+\tau y^{**}\|+\|x^{**}-\tau y^{**}\|-2;\\&\qquad x^{**},y^{**}\in U(X^{**})\}\\&=\sup\{\|x+\tau y\|+\|x-\tau y\|-2;x,\ y\in U(X)\}\\&=2\rho_X(\tau),\end{aligned}$$

因此，也有

$$\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2}-\delta_{X^*}(\varepsilon);\ 0<\varepsilon<2\right\},\ \tau>0.$$

在实际应用及理论研究中，考虑凸性模和光滑模的阶是十分有用的。为此，我们引入下面的定义。

定义 5.5.1 设 $2\leqslant q<+\infty$，Banach 空间 X 称为 q-致凸

的，如果存在某个常数 C，使 $\delta_X(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q$。

设 $1<p\leqslant 2$，Banach 空间 X 称为 p 一致光滑的，如果存在某个常数 K，使 $\rho(\tau)\leqslant K\tau^p$。

下面我们给出 q 一致凸和 p 一致光滑空间的一些特征，并证明 q 一致凸空间是 cotype q，p 一致光滑空间是 type p。

定理 5.5.3 设 $1<p\leqslant 2$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$X$是 Banach 空间，则

(1) X 是 p 一致光滑的当且仅当 X^* 是 q 一致凸的。

(2) X 是 q 一致凸的，当且仅当 X^* 是 p 一致光滑的。

证明 (1) 设 X 是 p 一致光滑的，则 $\rho_X(\tau)\leqslant K\tau^p$，对某个常数 K。

由于 $\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{\varepsilon\tau}{2}-\delta_{X_*}(\varepsilon);0<\varepsilon<2\right\}$，故

$$\frac{\varepsilon\tau}{2}-\delta_{X^*}(\varepsilon)\leqslant k\tau^p,$$

即 $\delta_{X_*}(\varepsilon)\geqslant\frac{\varepsilon\tau}{2}-K\tau^p$，取 $\alpha>0$，使$\frac{1}{2\alpha}>K$，令 $\tau=(\alpha\varepsilon)^{q-1}$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\frac{\varepsilon\tau}{2}-K\tau^p=\varepsilon^q\left(\frac{\alpha^{q-1}}{2}-K\alpha^q\right)=C\varepsilon^q,$$

其中 $C=\frac{1}{2}\alpha^{q-1}-K\alpha^q>0$，即

$$\delta_{X^*}(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q,$$

故 X^* 是 q 一致凸的。

反之，设 X^* 是 q 一致凸的，则 $\delta_{X^*}(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q$，

由于 $\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{\varepsilon\tau}{2}-\delta_{X^*}(\varepsilon);0<\varepsilon<2\right\}$，故

$$\rho_X(\tau)\leqslant\sup\left\{\frac{\varepsilon\tau}{2}-C\varepsilon^q;0<\varepsilon<2\right\}.$$

取 $l>0$，使 $\frac{1}{2ql^q}<C$，利用不等式

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

其中 $a,b>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，我们有

$$\rho_X(\tau) \leqslant \sup\left\{\frac{l^p}{2p}\tau^p + \frac{1}{2ql^q}\varepsilon^q - C\varepsilon^q;\ 0<\varepsilon<2\right\}$$

$$\leqslant \frac{l^p}{2p}\tau^p = K\tau^p,$$

其中 $K=\frac{l^p}{2p}$，即 $\rho_\tau(x)\leqslant K\tau^p$，从而 X 是 p 一致光滑的。证毕。

(2) 因为 q 一致凸和 p 一致光滑空间都是自反的，利用 (1) 的结论即知。证毕。

定理 5.5.4 设 $1<p\leqslant 2$，X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) X 是 p 一致光滑的空间；

(2) $\exists C>0$，使得对任 $x,y\in X$，有

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p \leqslant 2\|x\|^p + C\|y\|^p;$$

(3) $\exists K>0$，使得对任何概率测度空间 (Ω,Σ,P)，任 $x_1(\omega)$，$x_2(\omega)\in L_p(P,X)$，满足 $x_1(\omega)$ 是 Σ_1 可测，$x_2(\omega)$ 是 Σ_2 可测，其中 Σ_1,Σ_2 是 Ω 的子集的 σ 代数，且 $\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\Sigma$，如果

$$\|2x_1(\omega)-E(x_2(\omega)|\Sigma_1)\| \geqslant \|x_1(\omega)\| \quad \text{a.e 成立},$$

则 $E(\|x_2(\omega)\|^p - \|x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1) \leqslant KE(\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1)$。

(4) $\exists K>0$，使得对任何概率测度空间 (Ω,Σ,P)，任何子 σ 代数列 $(\Sigma_n)_{n=0}^{\infty}$，具有性质 $\Sigma_n\subset\Sigma_{n+1}\subset\cdots\subset\Sigma$，$x_n(\omega)\in L_p(P,X)$，$x_n(\omega)$ 是 Σ_n 可测的，$n=0,1,2,\cdots$，如果

$$\|2x_n(\omega)-E(x_{n+1}(\omega)|\Sigma_n)\| \geqslant \|x_n(\omega)\| \quad \text{a、e 成立},$$

则

$$\sup_n E\|x_n(\omega)\|^p \leqslant E\|x_0(\omega)\|^p + K\sum_{n=0}^{\infty} E\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^p.$$

(5) $\exists$ 常数 $C>0$，使得对任何概率测度空间 (Ω,Σ,P) 及任

何正整数 n，任何 $x\in X$，任何独立均值为 0 的 X 值随机变量列 $(x_i(\omega))_{i=1}^n\subset L_p(P,X)$，有

$$E\left\|x+\sum_{i=1}^n x_i(\omega)\right\|^p\leqslant\|x\|^p+C\cdot E\sum_{i=1}^n\|x_i(\omega)\|^p.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 首先易见 X 是 p 一致光滑空间，当且仅当存在常数 C，使对一切 $x,y\in X(x\neq 0)$，有

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|\leqslant\|x\|\left(1+C\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\right).$$

因此，当 X 是 p 一致光滑空间时，对任 $x(\neq 0),y\in X$，

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)+\|x-y\|$$

$$-(\|x\|-\|y\|)\leqslant\|x\|C\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}.$$

(Ⅰ)若 $\|y\|\leqslant\|x\|$，则

$$\max(\|x+y\|,\|x-y\|)\leqslant 2\|x\|,$$

利用实数不等式 $u^p-v^p\leqslant pu^{p-1}(u-v)$，$u$，$v\geqslant 0$，$p\geqslant 1$，及

$$\frac{1}{2}(|u+v|^p+|u-v|^p)\leqslant|u|^p+|v|^p,u,v\in R^1,p\in[1,2],$$

(a)当 $\|x-y\|\leqslant\|x+y\|\leqslant 2\|x\|$ 时，

$$\|x+y\|^p\leqslant(\|x\|+\|y\|)^p+p\|x+y\|^{p-1}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|))$$

$$\leqslant(\|x\|+\|y\|)^p+p\|x-y\|^{p-1}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|));$$

$$\|x-y\|^p\leqslant(\|x\|-\|y\|)^p+p\|x-y\|^{p-1}(\|x-y\|-(\|x\|-\|y\|)),$$

上面两式相加除 2，有

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\leqslant\frac{1}{2}[(\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p]$$

$$+p\|x-y\|^{p-1}\frac{1}{2}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)+\|x-y\|-(\|x\|$$

$$-\|y\|))\leqslant\frac{1}{2}((\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p)$$

$$+\frac{1}{2}p(2\|x\|^{p-1}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)$$

$$+\|x-y\|-(\|x\|-\|y\|)(\leqslant\frac{1}{2}((\|x\|+\|y\|)^p$$

$$+(\|x\|-\|y\|)^p)+p\cdot 2\|x\|^{p-1}\cdot\|x\|C\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}$$

$$\leqslant\|x\|^p+\|y\|^p+p2^{p-1}C\|y\|^p=\|x\|^p+(1+p2^{p-1}C)\|y\|^p.$$

(b) 当 $\|x+y\|\leqslant\|x-y\|\leqslant 2\|x\|$ 时，

$$\|x-y\|^p\leqslant(\|x\|+\|y\|)^p+p\|x-y\|^{p-1}(\|x-y\|-(\|x\|+\|y\|))$$

$$\leqslant(\|x\|+\|y\|)^p+p\|x+y\|^{p-1}(\|x-y\|-(\|x\|+\|y\|)),$$

$$\|x+y\|^p\leqslant(\|x\|-\|y\|)^p+p\|x+y\|^{p-1}(\|x+y\|-(\|x\|-\|y\|)),$$

上面两式相加除2，有

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\leqslant\frac{1}{2}((\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p)$$

$$+p\|x+y\|^{p-1}\frac{1}{2}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)+\|x-y\|$$

$$-(\|x\|-\|y\|))\leqslant\frac{1}{2}((\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p)$$

$$+\frac{1}{2}p(2\|x\|)^{p-1}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)+\|x-y\|$$

$$-(\|x\|-\|y\|))\leqslant\frac{1}{2}((\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p)$$

$$+p\cdot 2\|x\|^{p-1}\|x\|C\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\leqslant\|x\|^p+\|y\|^p+p2^{p-1}C\|y\|^p$$

$$=\|x\|^p+(1+p2^{p-1}C)\|y\|^p.$$

(Ⅱ)若 $\|y\|>\|x\|$，则 $\max(\|x+y\|,\|x-y\|)\leqslant 2\|y\|$，故

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\leqslant 2^p\|y\|^p\leqslant\|x\|^p+2^p\|y\|^p.$$

结合(Ⅰ)、(Ⅱ)两种情况，令 $L=2\max(2^p,1+p2^{p-1}C)$，则对任 $x,y\in X$，有

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leqslant 2\|x\|^p+L\|y\|^p.$$

证毕.

(2)$\Longrightarrow$(1)　因为

$$\rho_X(\tau)=\sup\left\{\left\|\frac{x+y}{2}\right\|+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|-1;\|x\|=1,\ \|y\|\leqslant\tau\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\left(\frac{\|x+y\|}{2}+\frac{\|x-y\|}{2}\right)^p-1;\|x\|=1,\|y\|\leqslant\tau\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)-1;\|x\|=1,\ \|y\|\leqslant\tau\right\}$$

$$\leqslant\left\{1+\frac{C}{2}\tau^p-1\right\}=\frac{C}{2}\tau^p.$$

故 X 是 p 一致光滑的。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3) 设$(x_1(\omega),\Sigma_1)$,$(x_2(\omega),\Sigma_2)$满足(3)的条件，利用 Jensen 不等式(引理 2.2.2)有

$$\begin{aligned}\|x_1(\omega)\|^p&\leqslant\|2x_1(\omega)-E(x_2(\omega)|\Sigma_1)\|^p\\&=\|E(2x_1(\omega)-x_2(\omega)|\Sigma_1)\|^p\\&\leqslant E(\|2x_1(\omega)-x_2(\omega)\|^p|\Sigma_1).\end{aligned}$$

又由条件(2)及$E(\cdot|\Sigma_1)$的单调性(定理 2.2.1),有

$$\begin{aligned}&E(\|x_1(\omega)\|^p+\|x_2(\omega)\|^p|\Sigma_1)\leqslant E(\|x_2(\omega)\|^p+\|2x_1(\omega)\\&\quad-x_2(\omega)\|^p|\Sigma_1=E(\|x_1(\omega)+(x_2(\omega)-x_1(\omega))\|^p+\|x_1(\omega)\\&\quad-(x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1)\leqslant 2E(\|x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1)\\&\quad+C\cdot E(\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1),\end{aligned}$$

移项得

$$E(\|x_2(\omega)\|^p-\|x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1)\leqslant C\cdot E(\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^p|\Sigma_1).$$

证毕。

(3)$\Longrightarrow$(2) 对任$x,y\in X$，令 $x_1(\omega)\equiv x_1$, $x_2(\omega)=x+\varepsilon(\omega)y$，其中 $\varepsilon(\omega)$是以 概 率 $\frac{1}{2}$取 ±1 的随机变量，则

$$\|x_1(\omega)\|=\|x\|=\|2x-x\|=\|2x_1(\omega)-E(x_2(\omega)|\Sigma_1))\|,$$

其中 $\Sigma_1=\{\phi,\Omega\}$。

由(3)知，

$$E(\|x+\varepsilon(\omega)y\|^p-\|x\|^p|\Sigma_1)\leqslant KE(\|\varepsilon(\omega)y\|^p|\Sigma_1)$$

故 $\quad E(\|x+\varepsilon(\omega)y\|^p-\|x\|^p)\leqslant KE(\|\varepsilon(\omega)y\|^p)=K\|y\|^p$.

但是，$E(\|x+\varepsilon(\omega)y\|^p-\|x\|^p)=\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)-\|x\|^p$

故

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\leqslant\|x\|^p+K\|y\|^p.$$

即(2)成立。证毕。

(3)$\Longrightarrow$(4) 设$(x_n(\omega),\Sigma_n)_{n=0}^{\infty}$满足(4)中条件，则由(3)，

$$E(\|x_1(\omega)\|^p-\|x_0(\omega)\|^p|\Sigma_0)\leqslant K\cdot E(\|x_1(\omega)-x_0(\omega)\|^p|\Sigma_0)$$

$$\vdots$$

$$E(\|x_{n+1}(\omega)\|^p-\|x_n(\omega)\||\Sigma_n)\leqslant K\cdot E(\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^p|\Sigma_n)$$

积分上面各式，得

$$E(\|x_1(\omega)\|^p-\|x_0(\omega)\|^p)\leqslant KE(\|x_1(\omega)-x_0(\omega)\|^p)$$

$$\vdots$$

$$E(\|x_{n+1}(\omega)\|^p-\|x_n(\omega)\|^p)\leqslant KE(\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^p)$$

相加上面各式，得

$$E\|x_{n+1}(\omega)\|^p\leqslant E\|x_0(\omega)\|^p+K\sum_{n=0}^{n}E(|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^p$$

$$\leqslant E\|x_0(\omega)\|^p+K\sum_{n=0}^{\infty}E\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^p,$$

故

$$\sup_n E\|x_n(\omega)\|^p\leqslant E\|x_0(\omega)\|^p+K\sum_{n=0}^{\infty}E\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^p.$$

证毕。

(4)$\Longrightarrow$(5) 令$y_0(\omega)\equiv x, y_n(\omega)=x+\sum_{i=1}^{n}x_i(\omega)$，则$(y_n(\omega),\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$是Martingale，其中$\Sigma_n$是使$(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$可测的最小子$\sigma$代数，应用(4)于$(y_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$即得所要不等式。证毕。

(5)$\Longrightarrow$(2) 可仿照(3)$\Longrightarrow$(2)的证明。证毕。

定理 5.5.5 设X是Banach空间，$2\leqslant q<+\infty$，则TFAE：

(1) X是q一致凸的；

(2) $\exists L>0$，使得对$x,y\in X$，有

$$\|x+y\|^q+\|x-y\|^q\geqslant 2\|x\|^q+L\|y\|^q;$$

(3) $\exists K>0$，对任何概率测度空间(Ω,Σ,P)，对任何X值

Martingale $(x_i(\omega),\Sigma_i)_{i=1}^{2}\subset L_q(P,X)$，有

$$E(\|x_2(\omega)\|^q-\|x_1(\omega)\|^q|\Sigma_1)\geqslant KE(\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^q|\Sigma_1).$$

(4) $\exists K>0$，对任何概率测度空间 (Ω,Σ,P)，对 X 值 Martingale $(x_n(\omega),\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}\subset L_q(P,X)$，有

$$\sup_n E\|x_n(\omega)\|^q\geqslant E\|x_0(\omega)\|^q+K\sum_{n=0}^{\infty}E\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\|^q.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(3) 设 $(x_i(\omega),\Sigma_i)_{i=1}^{2}$ 满足 (3) 中条件，即 $(x_i(\omega),\Sigma_i)_{i=1}^{2}$ 是 X 值 Martingale。

任取 $y_1(\omega)$，$y_2^*(\omega)\in L_p(P,X^*)$，其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

令 $x_1^*(\omega)=E(y_1^*(\omega)|\Sigma_1)$，$x_2^*(\omega)=y_2^*(\omega)-E(y_2^*(\omega)|\Sigma_1)+x_1^*(\omega)$，则 $E(x_2^*(\omega)|\Sigma_1)=x_1^*(\omega)$。

因为

$$E(y_1^*(\omega)x_1(\omega))=E(x_1^*(\omega)x_1(\omega));$$
$$E(x_1^*(\omega)(x_2(\omega)-x_1(\omega)))=0;$$
$$E((x_2^*(\omega)-x_1^*(\omega))x_1(\omega))=0;$$
$$E(E(y_2^*(\omega)|\Sigma_1)(x_2(\omega)-x_1(\omega)))=0,$$

故

$$\begin{aligned}E(y_1^*(\omega)x_1(\omega)+y_2^*(\omega)(x_2(\omega)-x_1(\omega)))&=E(x_1^*(\omega)x_1(\omega)\\&+x_1^*(\omega)(x_2(\omega)-x_1(\omega))+(x_2^*(\omega)-x_1^*(\omega)x_1(\omega)\\&+(y_2^*(\omega)-E(y_2^*(\omega)|\Sigma_1))(x_2(\omega)-x_1(\omega))).\end{aligned}$$

整理上式右边得

$$E(y_1^*(\omega)x_1(\omega)+y_2^*(\omega)(x_2(\omega)-x_1(\omega)))=E(x_2^*(\omega)x_2(\omega)),$$

而

$$\begin{aligned}E(x_2^*(\omega)x_2(\omega))&\leqslant E\|x_2^*(\omega)\|\|x_2(\omega)\|\\&\leqslant\frac{1}{p}E\|x_2^*(\omega)\|^p+\frac{1}{q}E\|x_2(\omega)\|^q,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&E(y_1^*(\omega)x_1(\omega)+y_2^*(\omega)(x_2(\omega)-x_1(\omega)))\\&\leqslant\frac{1}{p}E\|x_2^*(\omega)\|^p+\frac{1}{q}E\|x_2(\omega)\|^p.\end{aligned}\tag{5.14}$$

因为 X 是 q 一致凸的，故由定理 5.5.3，X^* 是 p 一致光滑

的，根据定理 5.5.4(3)，存在常数 K，使

$$\frac{1}{p}E\|x_2^*(\omega)\|^p \leqslant \frac{1}{p}E\|x_1^*(\omega)\|^p + \frac{1}{p}KE\|x_2^*(\omega)$$

$$-x_1^*(\omega)\|^p \leqslant \frac{1}{p}E\|y_1^*(\omega)\|^p + 2^p\frac{1}{p}KE\|y_2^*(\omega)\|^p, \tag{5.15}$$

将(5.15)代入(5.14)，得

$$E(y_1^*(\omega)x_1(\omega) + y_2^*(\omega)(x_2(\omega) - x_1(\omega)))$$

$$\leqslant \frac{1}{p}E\|y_1(\omega)\|^p + 2^p\frac{1}{p}KE\|y_2^*(\omega)\|^p$$

$$+\frac{1}{q}E\|x_2(\omega)\|^q. \tag{5.16}$$

特别地，在(5.16)中取 $y_1^*(\omega) = \|x_1(\omega)\|^{q-1}Jx_1(\omega)$,

$$y_2^*(\omega) = C\|x_2(\omega) - x_1(\omega)\|^{q-1}J(x_2(\omega) - x_1(\omega)),$$

其中 $Jx_1(\omega) \in S(X^*)$，使 $(Jx_1(\omega))(x_1(\omega)) = \|x_1(\omega))\|$,

$$\forall\omega \in \Omega, J(x_2(\omega) - x_1(\omega)) \in S(X^*), \text{使}$$

$$(J(x_2(\omega) - x_1(\omega)(x_2(\omega) - x_1(\omega)) = \|x_2(\omega) - x_1(\omega))\|,$$

$\forall\omega \in \Omega$，C 为任意常数(下面再选取)，得

$$E(\|x_1(\omega)\|^q + C\|x_1(\omega) - x_2(\omega)\|^q)$$

$$\leqslant \frac{1}{p}E\|x_1(\omega)\|^q + 2^p\frac{1}{p}KE(C^p\|x_2(\omega) - x_1(\omega)\|^q)$$

$$+\frac{1}{q}E\|x_2(\omega)\|^q,$$

故

$$\left(C - 2^p\frac{K}{p}C^p\right)E\|x_2(\omega) - x_1(\omega)\|^q$$

$$\leqslant \frac{1}{q}E(\|x_2(\omega)\|^q - \|x_1(\omega)\|^q).$$

特别选取常数 C 为 C_0，其中 C_0 使

$$q\left(C_0 - 2^p\frac{K}{p}C_0^p\right) \equiv C_1 > 0,$$

则有

$$C_1E\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^q\leqslant E(\|x_2(\omega)\|^q-\|x_1(\omega)\|^q). \tag{5.17}$$

为了得到

$$C_1E(\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^q|\Sigma_1)\leqslant E(\|x_2(\omega)\|^q-\|x_1(\omega)\|^q), \tag{5.18}$$

只须证明，对任 $A\in\Sigma_1$，有

$$\begin{aligned}&C_1E\|x_2(\omega)\chi_A(\omega)-x_1(\omega)\chi_A(\omega)\|^q\\&=C_1\int_A\|x_2(\omega)-x_1(\omega)\|^q\,dP\\&\leqslant\int_A(\|x_2(\omega)\|^q-\|x_1(\omega)\|^q)\,dP\\&=E(\|x_2(\omega)\chi_A(\omega)\|^q-\|x_1(\omega)\chi_A(\omega)\|^q).\end{aligned} \tag{5.19}$$

但是对任 $A\in\Sigma_1$，$(x_1(\omega)\chi_A(\omega),\ \Sigma_1)$，$(x_2(\omega)\chi_A(\omega),\ \Sigma_2)$ 仍然是 X 值 Martingale，故应用 (5.17) 式到 $x_1(\omega)\chi_A(\omega)$ 和 $x_2(\omega)\chi_A(\omega)$，即得(5.19)式。因而(5.18)式成立。这就证明了(4)成立。

(3)$\Longrightarrow$(4) 与定理 5.5.4(3)$\Longrightarrow$(4) 类似。

(4)$\Longrightarrow$(2) 与定理 5.5.4(5)$\Longrightarrow$(2)类似。

(2)$\Longrightarrow$(1) 设 $x,y\in X$，$\|x\|=\|y\|=1$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$，应用条件(2)，有

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right\|^q+\left\|\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right\|^q\\&\geqslant2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q+L\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q\end{aligned}$$

即
$$\|x\|^q+\|y\|^q\geqslant2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q+L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q,$$

故

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\geqslant1-\left(1-\frac{L}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.20}$$

容易看到，(因 $q\geqslant2$，更有 $q>1$)，$\exists A>0$，使得

$$1-\left(1-\frac{L}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant A\varepsilon^q,\ 0<\varepsilon\leqslant2.$$

故由(5.20)式，有

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\geqslant A\varepsilon^q,$$

从而 $\delta_X(\varepsilon)\geqslant A\varepsilon^q$，即 X 是 q 一致凸空间。证毕。

定理 5.5.6 设 X 是 q 一致凸空间，则 X 是 cotype q。

证明 我们将归纳证明

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^q dt\geqslant\frac{L}{2}\sum_{i=1}^n\|x_i\|^q, \tag{5.21}$$

其中 $(x_i)_{i=1}^n\subset X$ 是任意元$\left(\text{不妨设}\frac{L}{2}<1\right)$。

如果我们证明了(5.21)式，那么，应用 Kahane 不等式(定理5.1.1)即知 X 是 cotype q。

对 $n=1$，(5.21)式显然成立。

设 $k=n$ 时(5.21)式成立，考虑 $k=n+1$。应用定理5.5.5(2)有

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n+1} r_i(t)x_i\right\|^q dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i+x_{n+1}\right\|^q dt+\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i-x_{n+1}\right\|^q dt\right)$$

$$\geqslant\int_0^1\left(\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^q+\frac{L}{2}\|x_{n+1}\|^q\right)dt$$

$$\geqslant\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\|x_i\|^q.$$

即(5.21)对 $k=n+1$ 成立。由归纳法知(5.21)式成立.证毕。

定理 5.5.7 设 X 是 p 一致光滑空间，则 X 是 type p。

证明 与定理 5.5.6 类似证明。证毕。

注 这个定理也可由 p 一致光滑空间与 q 一致凸空间的对偶关系及自反空间中 type 与 cotype 的对偶性，利用定理 5.5.6 得到。□

第五章 参考文献

(B-1) A. Beck A convexity condition in Banach spaces and

the strong law of large numbers.

Proc. A.M.S. 13(1962) 329~334.

(HJ-1) J. Hoffman-Jϕrgensen Probability and geometry of Banach spaces.

Lecture Notes in Math 948 (1984) 164~218 Springer-Varlag.

(HJ-2) J. Hoffman-Jϕrgensen Sums of independent Banach spaces valued random variables.

Aarhus Univ. Preprint series No. 15 (1972—1973)

(J-1) R.C. James Nonreflexive spaces of type 2 Israel J. Math, Vol. 30. no. 1-2 (1978) 1~13.

(Ka-1) J.P. Kahane Series of random functions Cambridge Univ. press (1985). 5.

(Kw-1) S. Kwapien Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal series with vector coefficients.

Studia Math. 44 (1972) 583-593.

(M-S-1) B. Maurey & G. Pisier Series de Variables aleatoires vectorielles independantes et propietes geometriques des espaces de Banach.

Mimepraphed notes, Ecole Polytechnique, Paris November (1974).

(Pi-1) G. Pisier Holormorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces.

Ann. Math. (2) 115 (1982) 3753~92.

(Pi-2) G. Pisier On the duality between type and cotype.

Matingale Theory in Hormonic Analysis and Banach spaces (Proc. Cleveland 1981)

Lecture Notes in Math. 939. Springer.

(Pi-3) G. Pisier K-convexity
Proc. Res. Workshop on Banach space Theory June 29-Juhy 31, 1981.
Univ. of Iowa press. (1982)
(Pi-4) G. Pisier Quotients of Banach spaces of cotype q.
Proc. A. M.S. 85(1982) 32~36.
(S-1) L. Schwartz Geometry and Probability in Banach spaces
Lectuve Notes in Math. 852(1981). Springer
(W-1) W. A. Woyczynski Geometry and Martingale in Banach spaces.
Winter-School. of Probability. Karpacz(1975) 229~275.

第六章　嵌入问题

最重要的经典序列 Banach 空间是 $c_0, l_p, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$。

$l_p, 1 < p < +\infty$，是一致凸空间(例见参考书(俞-1))。一致凸空间是仅次于 Hilbert 空间、具有良好几何性质的 Banach 空间，已经有许多关于 Hilbert 空间的结果推广到一致凸空间中。虽然仍然存在一致凸空间，例 $l_p, 1 < p < +\infty, p \neq 2$，它有子空间不具基(见参考书(L-T-Ⅰ))。

然而，对 c_0, l_1, l_∞ 情况就大为不同，本章首先进一步讨论这些空间的基本性质，接着讨论所谓嵌入问题。

前面已经说过，Banach 空间 Y 称为嵌入到 Banach 空间 X 中，如果存在 X 的子空间 X_1，使 $X \approx X_1$，此时记为 $Y \hookrightarrow X$，或简称"X 含 Y"。

Banach 在他的名著"线性算子理论"中，曾作如下猜想：

是否每个无限维 Banach 空间 X，或者含 c_0，或者含 l_p，$1 \leqslant p < +\infty$？

长期以来，人们对这类嵌入问题进行了深入研究。本章另一部就这方面结果作一些归纳。

一直到 1973 年，苏联数学家 Tsirelson 给出了一个 Banach 空间 T，它不含 c_0，不含 l_p，$1 \leqslant p < +\infty$。从而给上述猜想以否定回答，后来，人们发现，实际上 Tsirelson 提供了一种新的思想，由此可构造一类 Banach 空间，它给出许多原来 Open 问题的解答。这一类空间称之为 Tsirelson 型空间（详见 Casazza 专著(Ca-1)）。

但是，很遗憾 Tsirelson 空间是自反的，于是大家猜想（也有有称之为 Rosenthal 猜想)：

是否每个无限维 Banach 空间 X，或者 X 含 c_0，或者 X 含 l_1，或者 X 含无限维自反空间？

1980 年 Odell (O-1) 证明每个无限维 Banach 空间 X，或者 X 含 c_0，或者 X 含 l_1，或 X 含无限维非 DPP 子空间。因此，人们就问：是否非 DPP 空间必是自反的，但 Bourgain & Delbaen (B-D-1) 给出了反例，因此，Rosenthal 猜想仍是大家关注的一个重要的 Open 问题。

§1 c_0 及含 c_0 的空间

我们首先归纳 c_0 空间的一些性质，然后逐一讨论。

(1) c_0 是 prime 空间（见定义 1.2.1、定理 1.2.6）；

(2) c_0 是可分 $\mathscr{P}_2$ 空间，WCG$\mathscr{P}_2$ 空间（见定义 6.1.1、定理 6.1.2）；

(3) c_0 不具有界完备基，自然基是收缩基（见定义 6.1.3、定理 6.1.3 及定理 6.1.4）；

(4) c_0 不具 KMP，且不具 RNP（见定义 3.1.24、定理 6.1.4）；

(5) $c_0 \not\hookrightarrow$ 可分共轭空间（见定理 6.1.4）；

(6) c_0 不是 w 序列完备的（见定理 6.1.5）；

(7) c_0 具 w BSP（见定理 6.1.6）；

(8) c_0 不是 B 凸的（见定义 5.4.1，定理 6.1.7）；

(9) c_0 是 Asplund 空间（见定义 6.1.4、定理 6.1.8）；

(10) c_0 是可分 Banach 空间，具有可分空间的一切性质（例如再赋范性质（参考书（俞-1）））；

(11) 对任何 Banach 空间 X，Y，任何 $T \in K(X,T)$，T 因子分解通过 c_0 的子空间（见定理 2.3.19）；

(12) c_0 具子空间，它不具 AP、没有基（参考书（俞-1）附录）

(13) c_0 是 DP 空间(见定义 1.2.2,定理 6.1.11);

(14) c_0 没有无限维自反子空间(见定理 6.1.14);

(15) c_0 是 LP 空间(见定义 6.1.6,定理 6.1.21);

(16) c_0 具有一个商空间不是 LP 空间(见推论 6.2.6);

(17) c_0 有一个光滑子空间(推论 6.2.5);

(18) c_0 的每个正规化无条件基等价于自然基(见定理 6.1.20);

(19) c_0 是 $\mathscr{L}^{\infty}_{1+}$ 空间(见定理 5.4.3 注);

(20) 若 $2<p<r<+\infty$,则 $L(c_0,l_p)=\pi_r(c_0,l_p)$,但

$L(c_0,l_p)\neq\pi_p(c_0,l_p)$(见 (S-1), (K-1));

(21) 若 $1\leqslant p\leqslant 2$, 则 $L(c_0,l_p)=\pi_2(c_0,l_p)$(见定理 6.1.18);

(22) c_0 不是 Polish 空间(见定义 6.1.7、定理 6.1.26);

(23) c_0 的每个商空间线性同胚于 c_0 的一个子空间(见参考书(L-T-Ⅰ));

(24) c_0 在 l_∞ 中不可补(由于 l_∞ 是 prime 空间)。

下面我们逐一进行讨论。

定义 6.1.1 Banach 空间 X 称为 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间 ($\lambda\geqslant 1$),如果对任何以 X 为子空间的 Banach 空间 Z, 存在投影 $P:Z\longrightarrow X$, 使 $\|P\|\leqslant\lambda$. Banach 空间 X 称为内射空间(injective),如果它是一个 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间,对某个 $\lambda\geqslant 1$.

$\mathscr{P}_\lambda$ 空间与具 λ 延拓性质的 Banach 空间有密切联系.

定义 6.1.2 Banach 空间 X 称为具 λ 延拓性质($\lambda\geqslant 1$), 如果对任何 Banach 空间 Y 及 Y 的任何子空间 Z, 和任何 $T\in L(Z,X)$,都存在 T 的延拓 $\tilde{T}\in L(Y,X)$,使 $\|\tilde{T}\|\leqslant\lambda\|T\|$(见图)。

$$\begin{array}{ccc} Y & \searrow^{\tilde{T}} & \\ \cup & & \\ Z & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

注 1 延拓性质也叫 Hahn-Banach延拓性质,著名的Hahn-

Banach 定理就是说实数空间和复数空间具有 Hahn-Banach 延拓性质。

定理 6.1.1 Banach 空间 X 是 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间当且仅当 X 具 λ 延拓性质。

证明"$\Longrightarrow$" 设 X 是 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间。

任取 Banach 空间 Y 及 Y 的子空间 Z 和 $T\in L(Z,X)$。取 $(x_r^*)_{r\in\Gamma}\subset S(X^*)$，使

$$\|x\|=\sup\{|x_r^*(x)|;r\in\Gamma\},\forall x\in X.$$

令 $S:X\longrightarrow l_\infty(\Gamma)\equiv\{(a_r)_{r\in\Gamma};a_r\in R^1,\ \|(a_r)_{r\in\Gamma}\|_\infty=\sup\limits_r|a_r|<+\infty\},Sx=(x_r^*(x))_{r\in\Gamma},\forall x\in X.$

易见，S 是 X 到 $l_\infty(\Gamma)$ 内的线性等距、由于 X 是 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间，故存在投影 $P:l_\infty(\Gamma)\longrightarrow X$，使 $\|P\|\leqslant\lambda$（即 X 是 $l_\infty(\Gamma)$ 的 λ 可补子空间）。

对每个 $r\in\Gamma$，$T^*x_r^*\in Z$，由 Hahn-Banach 延拓定理知，$T^*x_r^*$ 可保范延拓为 $y_r^*\in Y^*$。

令 $\hat{T}_0:Y\longrightarrow l_\infty(\Gamma),\hat{T}_0(y)=(y_r^*(y))_{r\in\Gamma}$，$\forall y\in Y$。则 $\tilde{T}=S^{-1}P\hat{T}_0:Y\longrightarrow X$ 就是 T 的延拓，且 $\|\tilde{T}\|\leqslant\lambda\|T\|$，即 X 具 λ 延拓性质。证毕。

"$\Longleftarrow$" 设 X 具 λ 延拓性质，任取 Banach 空间 Y，使 X 是 Y 的子空间。

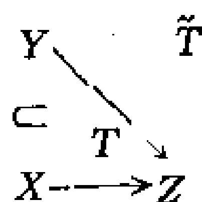
令 $I:X\longrightarrow X$ 是恒等算子，则由 X 具 λ 延拓性质，存在 I 的延拓 $\tilde{I}\in L(Y,X)$，使 $\|\tilde{I}\|\leqslant\lambda$，$\tilde{I}$ 即是 Y 到 X 的所要的投影。证毕。

注 1 仔细观察上述证明，我们发现实际上已经得到 $l_\infty(\Gamma)$ 具 1 延拓性质，从而是 $\mathscr{P}_1$ 空间（对任何 Γ）；同时，具有 λ 延拓性质的空间的 η 可补子空间具 $\lambda\eta$ 延拓性质。□

注 2 作为习题，读者可证明：X 是 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间当且仅当对任何 Banach 空间 Y，使 X 是 Y 的子空间，任何 Banach 空间 Z，任

$T\in L(X,Z)$，存在 T 的延拓 $\tilde{T}\in L(Y,Z)$，使 $\|\tilde{T}\|\leqslant\lambda\|T\|$（见图）。

注 3　1952 年 Nachbin 和 Kelly（见(N-1)，(Ke-1)）证明：X 是 $\mathscr{P}_1$ 空间当且仅当 $X\cong C(\Omega)$，对某个极端不连通的紧 Hausdorff 空间 Ω（拓扑空间称为极端不连通的（也称为 Stone 空间），如果每个开集的闭包仍为开集）



（图）

对于有限测度空间 $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$，可以证明 $L_\infty(M)$ 是 $\mathscr{P}_1$ 空间（参考书(H-1)p.222）□

注 4　定理 1.1.6 注已指出，易证每个 n 维空间是 $\mathscr{P}_n$ 空间，但可以证明 n 维空间是 $\mathscr{P}_{\sqrt{n}}$ 空间（参考书（Pi-1））。定理 1.1.6 注也指出了最近 kēng & Tomczak-Jaegerman 给出的最好估计。□

注 5　对 $\lambda>1$，$\mathscr{P}_\lambda$ 空间的特征尚不十分清楚。□

注 6　已经证明 $l_\infty\subset\!\!\to$ 每个无限维内射空间（见定理 6.3.38），故 c_0 不是内射空间，但如果我们限制在可分空间范围内来考虑，则 c_0 仍有类似性质，我们称 Banach 空间 X 为可分 $\mathscr{P}_\lambda$ 空间，如果对任何以 X 为子空间的可分 Banach 空间 Y，必存在投影 $P:Y\longrightarrow X$，使 $\|P\|\leqslant\lambda$。类似可定义可分内射空间，WCG$\mathscr{P}_\lambda$ 空间，WCG 内射空间。□

定理 6.1.2　c_0 是可分 $\mathscr{P}_2$ 空间。

证明　任取以 c_0 为子空间的可分 Banach 空间 X，令 $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ 是 l_1 的自然基，由于 $c_0^*\cong l_1$，由 Hahn-Banach 定理，e_n^* 可保范延拓为 $x_n^*\in X^*$。

我们有若 $x_{n_i}^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$，则 $x_0^*\in c_0^\perp$，事实上，若 $x_{n_i}^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$，则 $x_{n_i}^*(a)\longrightarrow x_0^*(a)$，$\forall a\in c_0$，故 $e_{n_i}^*(a)\longrightarrow x_0^*(a)$，但 $e_{n_i}^*(a)\longrightarrow 0$，从而 $x_0^*(a)=0$，$\forall a\in c_0$，即 $x_0^*\in c_0^\perp$。

由于 X 是可分的，故 $(U(X^*),\ w^*)$ 是可度量化的。设 d 为

$(U(X^*),w^*)$上平移不变度量，因此 $d(x_n^*,\ U(X^*)\cap c_0^{\perp})\longrightarrow 0$，选 $z_n^*\in U(X^*)\cap c_0^{\perp}$，使 $d(x_n^*,z_n^*)\longrightarrow 0$，因而，$x_n^*-z_n^*\xrightarrow{w^*}0$。

令 $Px=((x_n^*-z_n^*)(x))_{n=1}^{\infty}$，$\forall x\in X$，则 $Px\in c_0$。且对任 $x_0\in c_0$，有 $Px_0=x_0$。因此，P 是 $X\longrightarrow c_0$ 的投影，且

$$\|P\|=\sup_n\|x_n^*-z_n^*\|\leqslant 2。$$ 证毕。

注 1　1977 年 Zippin(Z-1)证明任何可分 $\mathscr{P}_2$ 空间$X\approx c_0$。
□

注 2　利用 WCG 空间的如下性质：若 Y 是可分 Banach 空间，X 是 WCG 空间，Y 是 X 的子空间，则存在 X 的可分子空间 Z，使 $Y\subset Z$，且 Z 在 X 中 1 可补（见参考书(D-1)），知对任何以 c_0 为子空间的 WCG 空间 X，存在投影 $P:X\longrightarrow c_0$，使 $\|P\|\leqslant 2$。即 c_0 也是 WCG$\mathscr{P}_2$ 空间。□

注 3　由定理也可得到 c_0 具可分延拓性质，即任何可分 Banach 空间 X 及 X 的任何子空间 Y 和任何 $T\in L(Y,c_0)$，存在 T 的延拓 $\tilde{T}\in L(X,c_0)$，使 $\|\tilde{T}\|\leqslant 2\|T\|$。事实上，令 $I:c_0\longrightarrow l_\infty$ 为恒等映象，则 $I\circ T\in L(Y,l_\infty)$，由定理 6.1.1 的注 1 知，存在$I\circ T$ 的延拓 $\overbrace{I\circ T}\in L(X,l_\infty)$，使 $\|I\circ T\|=\|\overbrace{I\circ T}\|$。由于 X 是可分的，故

$$Z=\overline{\mathrm{span}}(\overbrace{I\circ T}(X)\cup c_0)$$

是 l_∞ 的可分子空间，且 $c_0\subset Z$，因为 c_0 是可分 $\mathscr{P}_2$ 空间，故存在投影 $P:Z\longrightarrow c_0$，使 $\|P\|\leqslant 2$。则 $P\circ\overbrace{I\circ T}:X\longrightarrow c_0$，且

$$P\circ\overbrace{I\circ T}(y)=PIT(y)=PT(y)=T(y),\ \forall y\in Y.$$

故$P\circ\overbrace{I\circ T}$是 T 的延拓，且

$$\|P\circ\overbrace{I\circ T}\|\leqslant 2\|T\|。$$

即 c_0 具可分延拓性质。

由此，也得到 $c_0\hookrightarrow$ 可分 $X\Longrightarrow c_0\overset{C}{\hookrightarrow}X$，事实上，设 Y 是 X 的子空间，$Y\overset{T}{\approx}c_0$，则$T^{-1}\tilde{T}:X\longrightarrow Y$ 即为所要投影，其中$\tilde{T}$ 是 T 的延拓，$\tilde{T}\in L(X,c_0)$。□

定义 6.1.3　Banach 空间 X 的基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$称为收缩基，如果

对任 $x^*\in X^*$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|x^*|_{[x_k]_{k=n}^{\infty}}\|=0.$$

定理 6.1.3 c_0 的自然基是收缩基。

证明 从 $c_0^*\cong l_1$，及定义直接验证。证毕。

定理 6.1.4 c_0 不具 KMP，不具 RNP，$c_0 \not\hookrightarrow$ 可分共轭空间，c_0 不具有界完备基。

证明 容易证明 $\mathrm{ext}U(c_0)=\phi$，故 c_0 不具 KMP。由于 RNP $\Longrightarrow$ KMP（参考书〔俞-1〕p.347），故 c_0 不具 RNP。根据若 X^* 可分，则 X^* 具 RNP（定理 2.3.12）及 RNP 空间的子空间继承性及线性同胚不变性，立即知道 $c_0 \not\hookrightarrow$ 可分共轭空间，根据若 X 具有界完备基，则 X 具 RNP（定理 2.3.8），故 c_0 不具有界完备基。证毕。

定理 6.1.5 c_0 不是 w 序列完备的。

证明 令 $x_n=\sum_{i=1}^{n}e_i$，其中 $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ 为 c_0 的自然基，则 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 w Cauchy 列，但不 w 收敛于 c_0 中元。证毕。

定理 6.1.6 c_0 具 w BSP。

证明 Banach空间X称为具w Banach-Saks 性质（w BSP），如果对任何$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$x_n\xrightarrow{w}0$，则存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\longrightarrow 0(k\to\infty)$。

任取$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset c_0$，$x_n\xrightarrow{w}0$，不妨设$\|x_n\|\leqslant 1$，$\forall n$。若$\|x_n\|\longrightarrow 0$，则由引理 5.4.8 知 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\longrightarrow 0$。

否则存在子列（仍记作$(x_n)_{n=1}^{\infty}$），使$\|x_n\|\geqslant\varepsilon>0$，$\forall n$。则由基序列选择原理（见附录 2 定理 2.9），存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子列（仍记作$(x_n)_{n=1}^{\infty}$），使$(x_n)_{n=1}^{\infty}$等价于 c_0 的，自然基$(e_n)_{n=1}^{\infty}$的一个块基$(u_n)_{n=1}^{\infty}$，由于 $\varepsilon\leqslant\|x_n\|\leqslant 1$，故存在 m,M，使

$$m \leqslant \|u_n\| \leqslant M, \forall n.$$

因此，$\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)_{n=1}^{\infty}$ 是 c_0 的正规化块基，由定理1.2.1知，$\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}$，从而存在 K_1, K_2，使

$K_1 \sup\limits_n |a_n| \leqslant \left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leqslant K_2 \sup\limits_n |a_n|$，$\forall (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$。从而，$\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqslant K_2$，故 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow 0$。即 c_0 具 w BSP。证毕。

定理 6.1.7 c_0 不是 B 凸的。

证明 由定理5.2.7注，c_0 仅是"type 1"，根据定理5.4.7知，c_0 不是 B 凸的，证毕。

注 实际上也可直接构造 $(x_i)_{i=1}^{n} \subset U(c_0)$，对任何 n，使得

$$\min\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|;\ \varepsilon_i = \pm 1\right) = n$$

来证明 c_0 不是 B 凸的。事实上，例如，对 $n=4$，取

$$x_1 = e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 - e_8 + e_9 + e_{10} + e_{11} - e_{12} - e_{13} - e_{14} + e_{15},$$

$$x_2 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8 - e_9 - e_{10} + e_{11} - e_{12} - e_{13} + e_{14} - e_{15},$$

$$x_3 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8 - e_9 + e_{10} - e_{11} - e_{12} + e_{13} - e_{14} - e_{15},$$

$$x_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 + e_7 - e_8 + e_9 - e_{10} - e_{11} + e_{12} - e_{13} - e_{14} - e_{15},$$

则 $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| = n, \forall \varepsilon_i = 1$。 □

定义 6.1.4 Banach 空间 X 称为 Asplund 空间，如果 X 的每个开凸子集 E 上定义的连续凸函数 f 在 E 的一个稠 G_δ 集上是 Frechet 可微的。

注 关于 Asplund 空间的讨论见参考书(俞-1)第七章，特别地，我们知道，X 是 Asplund 空间当且仅当 X^* 具 RNP。 □

定理6.1.8 c_0 是 Asplund 空间

证明 由定义 6.1.4 注知，X 是 Asplund 空间当且仅当 X^* 具 RNP。根据 $c_0^*\cong l_1$ 及 l_1 具 RNP，立即知道 c_0 是 Asplund 空间，证毕。

我们在第一章中已引入 DP 空间的定义（定义 1.2.2），即如果对任何 Banach 空间 Y，任何 $T\in WK(X,Y)$，有 T 映 w 紧集为相对范紧集；或 $WK(X,Y)\subset DP(X,Y)$，$\forall$ Banach 空间 Y，则 X 称为 DP 空间。

我们再给出一些等价条件。

定理6.1.9 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) X 是 DP 空间；

(2) 对任何 Banach 空间 Y，任 $T\in WK(X,Y)$，任 $x_n\xrightarrow{w}0$，有 $Tx_n\xrightarrow{\|\cdot\|}0$。

(3) 对任何 Banach 空间 Y，任 $T\in WK(X,Y)$，X 中任何 w Cauchy 列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，有 $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ 是范数收敛序列。

(4) 任 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，$x_n\xrightarrow{w}0$，$x_n^*\xrightarrow{w}0$，有 $x_n^*(x_n)\longrightarrow 0$。

证明 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 由 Eberlein-Smulian 定理（Banach空间中 w 紧集与 w 序列紧集是一致的）即知。

(3)$\Longrightarrow$(2) 显然

(2)$\Longrightarrow$(3) 由于 Banach 空间 X 中序列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 w Cauchy 的（或范 Cauchy 的）当且仅当对任何正整数增加序列 $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ $(j_n)_{n=1}^{\infty}$，有 $z_{k_n}-z_{j_n}\xrightarrow{w}0$（分别地，$z_{k_n}-z_{j_n}\xrightarrow{\|\cdot\|}0$）。

(1)$\Longrightarrow$(4) 假设 X 是 DP 空间，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，$x_n\xrightarrow{w}0$，$x_n^*\xrightarrow{w}0$。

令 $T:l_1\longrightarrow X$，$T(a_n)_{n=1}^{\infty}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$，$\forall(a_n)_{n=1}^{\infty}\in l_1$，

$S: X \longrightarrow c_0, S(x) = (x_n^*(x))_{n=1}^\infty, \forall x \in X,$

则 $TU(l_1) \subset \overline{aco}(x_n)_{n=1}^\infty$，其中 $\overline{aco}(x_n)_{n=1}^\infty$ 是 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 的均衡闭凸包，它是一个 w 紧集，从而 T 是 w 紧算子，$S^*(U(l_1)) \subset \overline{aco}(x_n^*)_{n=1}^\infty$，$\overline{aco}(x_n^*)_{n=1}^\infty$ 也是一个 w 紧集，故 S^* 也是 w 紧算子，从而 S 也是 w 紧算子，由 X 是 DP 空间，故 $S(\overline{aco}(x_n)_{n=1}^\infty)$ 为相对紧集，但是，

$STU(l_1) \subset S(\overline{aco}(x_n)_{n=1}^\infty)$， 故 ST 为紧算子，由于 $x_m \xrightarrow{w} 0$，故 $Sx_m \xrightarrow{w} 0$，但是 $Sx_m = STe_m$，利用 ST 是紧算子，知 $Sx_m \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$。因而，当 $m \to \infty$ 时，有

$$|x_m^*(x_m)| \leqslant \|(x_n^*(x_m))_{n=1}^\infty\| = \|Sx_m\| \longrightarrow 0.$$

(4)$\Longrightarrow$(2) 反证，假若存在 Banach 空间 Y 及 $T \in WK(X, Y)$，和 $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$，$x_n \xrightarrow{w} 0$，但是

$$\inf \|Tx_n\| \geqslant \delta > 0.$$

对每个 n，选 $y_n^* \in S(Y^*)$，使 $y_n^*(Tx_n) = \|Tx_n\|$，则

$$T^* y_n^*(x_n) \geqslant \delta,$$

由于 $T \in WK(X, Y)$，故 $T^* \in WK(Y^*, X^*)$，由 Eberlein-Smulian 定理，如果必要可转到子序列，可假设 $T^* y_n^* \xrightarrow{w} x^*$，对某个 $x^* \in X^*$，则

$$Ty_n^* - x^* \xrightarrow{w} 0,$$

由条件(4)知，

$$\lim_n (T^* y_n^* - x^*)(x_n) = 0.$$

再根据 $x_n \xrightarrow{w} 0$，得到 $\lim\limits_n T^* y_n^*(x_n) = 0$。这与

$$0 < \delta \leqslant \lim_n \|Tx_n\| = \lim y_n^*(Tx_n) = \lim_n T^* y_n^*(x_n)$$

矛盾。证毕。

定理 6.1.10 若 X^* 是 DP 空间，则 X 是 DP 空间。

证明 由定理 6.1.9(4) 立即可看出。证毕。

定理 6.1.11 若 X 具 Schur 性质（即 X 中序列的 w 收敛与范数收敛是一致的），则 X 是 DP 空间，特别地，l_1 是 DP 空间，从而 c_0 是 DP 空间。

证明 由定理 6.1.9(2)立即得到，若 X 具 Schur 性质，则 X 是 DP 空间，由定理 6.1.10 及 l_1 是 Schur 空间，立即得到 c_0 是 DP 空间，证毕。

注 1 定理 1.2.10 已指出，对任何紧 Hausdorff 空间 Ω，$C(\Omega)$是 DP 空间。定理 2.3.24 告诉我们：若(Ω,Σ,μ)是有限完备测度空间，则 $L_1(\mu)$是 DP 空间。□

注 2 Stegall(S-1) 给出例子表明 X 是 DP 空间$\not\Rightarrow X^*$是 DP 空间，甚至有，X 是 Schur 空间$\not\Rightarrow X^*$是 DP 空间。□

定理 6.1.12 DP 空间 X 的可补子空间是 DP 空间。

证明 设 $T\in WK(X_0,Y)$，对某个 Banach 空间 Y。令 $P:X\longrightarrow X_0$ 的投影，则 $TP\in WK(X,Y)$，由于 X 是 DP 空间，则 $TP\in DP(X,Y)$。

任取$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X_0$，$x_n\xrightarrow{\sigma(X_0,X_0^*)}0$，则

$$x_n\xrightarrow{\sigma(X,X^*)}0,$$

由于 $TP\in DP(X,Y)$，故 $Tx_n=TPx_n\longrightarrow 0$，这表明 $T\in DP(X_0,Y)$，即 X_0 是 DP 空间。证毕。

注 DP 空间的子空间未必是 DP 空间，例 l_2 不是 DP 空间（可由定理 6.1.13 直接得到）。L_1 是 DP 空间，且 $l_2\hookrightarrow L_1$（推论 1.3.4）。□

定理 6.1.13 若 X 是 DP 空间，则

X 是自反的$\Longleftrightarrow\dim X<+\infty$。

证明 若 X 是 DP 且自反空间，则任取$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，有子列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使 $x_{n_i}\xrightarrow{w}x_0\in U(X)$，且由 X 的自反性知恒等算子 $I\in WK(X,X)$，从而 $x_{n_i}\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0\in U(X)$，这表明$U(X)$是范紧的，

从而 $\dim X<+\infty$. 证毕。

注　这个定理特别表明无限维自反空间一定是非 DP 空间（反之不然），同时，无限维 DP 空间一定不是自反的。□

定理 6.1.14　c_0 没有无限维自反子空间。

证明　由定理 1.2.2, c_0 的每个无限维子空间 X 含有一个子空间 Z, 使 $Z\approx c_0$, 且 Z 在 c_0 中可补，故 Z 是 DP 空间，由定理 6.1.13 知 Z 不可能是自反的，从而 X 不可能是自反的。证毕。

注 1　这个定理也可直接应用定理 1.2.2 及 c_0 不自反得到。□

注 2　从定理证明知道, DP 空间不含自反可补子空间。□

定理 6.1.15　若 (Ω,Σ,μ) 是有限测度空间，X 是 $L_\infty(\mu)$ 的线性(闭)子空间，若 X 在 $L_p(\mu)$ 中闭，对某个 $p, 1\leqslant p<+\infty$，则 $\dim X<+\infty$。

证明　由定理 6.1.1 注 3 及定理 6.1.11 注 1 知，$L_\infty(\mu)$ 是 DP 空间。

当 $1<p<+\infty$ 时, $L_p(\mu)$ 是自反的，故若 X 在 $L_p(\mu)$ 中闭，则 X 关于 $L_p(\mu)$ 范数是自反的，即 $(X,\|\cdot\|_p)$ 自反，但恒等算子 I: $L_\infty(\mu)\longrightarrow L_p(\mu)$ 限制在 X 上，$I|_X$: $(X,\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(X,\|\cdot\|_p)$ 是线性同胚(因 $(X,\|\cdot\|_p)$ 闭，由逆算子定理知)。故 $(X,\|\cdot\|_\infty)$ 也是自反的，故 $U(X,\|\cdot\|_p)$ 是 w 紧的，但因 $L_\infty(\mu)$ 是 DP 空间，故

$$I|_X(U(X,\|\cdot\|_\infty))=U(X,\|\cdot\|_p)$$

是紧的，从而有 $\dim X<+\infty$。

当 $p=1$ 时，由 $L_1(\mu)$ 的 w 紧集判别法知，恒等算子 I: $L_\infty(\mu)\longrightarrow L_1(\mu)$ 是 w 紧算子，因 X 在 $L_1(\mu)$ 中闭，故 $U(X,\|\cdot\|_1)$ 是 w 紧的，且 $I|_X$: $(X,\|\cdot\|_\infty)\longrightarrow(X,\|\cdot\|_1)$ 是线性同胚，故 $U(X,\|\cdot\|_\infty)$ 也是 w 紧的，同上证明 $\dim X<+\infty$。证毕。

注　由此特别得到当 $L_\infty(\mu)$ 是无限维时，

$$L_\infty(\mu)\not\hookrightarrow L_1(\mu), 1\leqslant p<+\infty.$$

在第四章，我们引入了 p 可和算子概念(定义 4.2.1)，其中

$1\leqslant p<+\infty$：$T\in L(X,Y)$称为p可和算子，如果对任何$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使得$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty$，$\forall x^*\in X^*$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<+\infty.$$

我们也证明：

$T\in\prod_p(X,Y)\Longleftrightarrow\exists C>0$，使对任$(x_n)_{n=1}^{m}\subset X$，有

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\|Tx_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{n=1}^{m}|x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

现在，我们将证明，对$1\leqslant p\leqslant 2$，有

$$L(c_0,l_p)=\prod\nolimits_2(c_0,l_p).$$

但是，由于c_0是$\mathscr{L}^{\infty}_{1^+}$空间（见性质(19)），更是$\mathscr{L}^{\infty}$空间，而$l_p$是$\mathscr{L}^p$空间，前面已经指出$\mathscr{L}^p$空间从局部观点来看与$l_p$差不多（当$p=+\infty$时$\mathscr{L}^{\infty}$与$c_0$差不多），而$p$可和算子正是具有这种"局部性"，因此，我们可证明更一般的命题：若$1\leqslant p\leqslant 2$，则

$$L(\mathscr{L}^{\infty},\mathscr{L}^p)=\prod\nolimits_2(\mathscr{L}^{\infty},\mathscr{L}^p).$$

为此，我们先要证明著名的 Grothendieck 不等式。□

首先作一些准备工作。

考虑空间l_2^n，即在n维空间R^n上取 Euclid 范数。以(x,y)表示$x,y\in l_2^n$的内积。记dz为R^n上的 Lebesgue 测度，$dG(z)$表示均值为0，方差为1的正规化 Gauss 随机变量决定的正规化 Gauss 测度，即

$$dG(z)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}dz.$$

容易看到，对任何可测函数f，有

$$\int_{R^n}f(z)dG(z)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}f(z)e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}dz.$$

且测度$dG(z)$在线性等距下不变。

记$L_2(G)\equiv L_2(R^n,dG)=\Big\{f:R^n\longrightarrow R^1$ 可测函数，

$$\|f\|_2=\left(\int_{R^n}|f(z)|^2dG(z)\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\Big\}.$$

易见，对 $f,g\in L_2(G)$，f,g 的内积

$$(f,g)=\int_{R^n}f(z)g(z)dG(z)$$

导出 $L_2(G)$ 上的范数。

对 $x\in l_2^n$，定义

$\varphi_x: l_2^n\longrightarrow R^1,\varphi_x(y)=(x,y),\forall y\in l_2^n$；

$S_x: l_2^n\longrightarrow R^1,S_x(y)=\mathrm{sgn}(x,y),\forall y\in l_2^n$。

易见，$\varphi_x,S_x\in L_2(G)$，我们还有

引理 6.1.16 设 $x,y\in l_2^n$，$\|x\|=\|y\|=1$，则

(1) $(\varphi_x,\varphi_y)=(x,y)$；

(2) $\int_{R^n}|\varphi_y(z)|dG(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$；

(3) $(\varphi_x,\ S_y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x,y)$；

(4) $\|\varphi_x-S_x\|^2=2-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$；

(5) $(x,\ y)=\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}-1\right)^{-1}((S_x,S_y)+(\varphi_x-S_x,$
$S_y-\varphi_y))$。

证明 (1)

$$\begin{aligned}&(\varphi_x,\varphi_y)\\&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_iz_i\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right)dz_1\cdots dz_n\\&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1y_1z_1^2+x_1z_1\sum_{i=2}^{n}y_iz_i+y_1z_1\sum_{i=2}^{n}x_iz_i\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\right)\left(\sum_{i=2}^{n}y_iz_i\right)\right)\exp\left(-\frac{z_1^2}{2}dz_1\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}z_i^2\right)dz_2\cdots dz_n\end{aligned}$$

$$=x_1y_1+(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=2}^{n}x_iz_i\right)\left(\sum_{i=2}^{n}y_iz_i\right)$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}z_i^2\right)dz_2\cdots dz_n=\cdots=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=(x,y).$$

$\left(注意上式中用到\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{X^2}{2}}dx=(2\pi)^{\frac{1}{2}},\ \int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{X^2}{2}}dx=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\right)$.

证毕。

(2) $\int_{R^n}|\varphi_y(z)|dG(z)=\int_{R^n}|(y,z)|dG(z)$.

选择适当正交变换U，使 $U_y=(1,0,\cdots,0)$，则

$$\int_{R^n}|(y,z)|dG(z)=\int_{R^n}|(y,U^*z)|dG(z)$$

$$=\int_{R^n}|(Uy,z)|dG(z)=\int_{R^n}|z_1|dG(z)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

(注意，其中用到 $dG(z)$在正交变换(线性等距)下不变，及

$$\left.\int_0^{\infty}te^{-\frac{x^2}{2}}dt=1\right).\ 证毕.$$

(3) 首先证明若 $y,y'\in l_2^n$, $y'\perp y$，则$(\varphi_{y'},S_y)=0$。事实上，选择适当正交变换U，使

$$U_y=(0,1,0,\cdots,0),\ \tau y'=(\|y'\|,0,\cdots,0).$$

则

$$(\varphi_{y'},\ S_y)=\int_{R^n}(y',z)\mathrm{sgn}(y,z)dG(z)$$

$$=\int_{R^n}(y',U^*z)\mathrm{sgn}(y,U^*z)dG(z)$$

$$=\int_{R^n}(Uy',z)\mathrm{sgn}(Uy,z)dG(z)$$

$$=\int_{R^n}(\|y'\|\cdot z_1)\mathrm{sgn}(z_2)dG(z)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\|y'\|z_1\left(\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(z_2)\exp\left(-\frac{z_2^2}{2}dz_2\right)\right)dz_1dz_3\cdots dz_n$$

$=0$。

对任 $x,y\in l_2^n$, $\|x\|=\|y\|=1$。选 $y'\in L_2$, 使 $y'\perp y$, 则

$$x=(x,y)y+y'.$$

从而

$$\begin{aligned}(\varphi_x,S_y)&=\int_{R^n}(x,z)\operatorname{sgn}(y,z)dG(z)\\&=\int_{R^n}(x,y)(y,z)\operatorname{sgn}(y,z)dG(z)\\&\quad+\int_{R^n}(y',z)\operatorname{sgn}(y,z)dG(z)\\&=(x,\ y)\int_{R^n}|\varphi_y(z)|dG(z)+(\varphi_{y'},S_y)(\text{由}(2))\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x,y).\end{aligned}$$

证毕。

(4) $$\begin{aligned}\|\varphi_x-S_x\|^2&=(\varphi_x-S_x,\varphi_x-S_x)\\&=(\varphi_x,\varphi_x)-2(\varphi_x,S_x)+(S_x,S_x)\\&=(x,\ x)-2(x,x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\\&\quad+\int_{R^n}|\operatorname{sgn}(x,z)|^2dG(z)\\&=2-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

证毕。

(5) $$\begin{aligned}(S_x,S_y)&=(\varphi_x,S_y)+(S_x,\varphi_y)-(\varphi_x,\varphi_y)\\&\quad-(\varphi_x-S_x,S_y-\varphi_y)\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x,y)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x,y)\\&\quad-(x,y)-(\varphi_x-S_x,S_y-\varphi_y)\end{aligned}$$

（由(3)，(1))，

故 $(x, y) = \left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1\right)^{-1}((S_x, S_y) - (\varphi_x - S_x, S_y - \varphi_y)$.

证毕。

现在我们准备证明著名的 Grothendieck 不等式。

定理 6.1.17 (Grothendieck 不等式) 存在一个绝对常数 $K_G>0$，使得对任何正整数 n 和 $n\times n$(实)矩阵(a_{ij})有

$$|(a_{ij})|_{\mathscr{H}} \equiv \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i, y_j)\right|; x_i, y_j \in \text{某个 Hilbert 空间}, \|x_i\|\leqslant 1, \|y_j\|\leqslant 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\|; x_j \in \text{某个 Hilben空间}, \|x_j\|\leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant K_G \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_i t_j\right|; |s_i|, |t_j|\leqslant 1\right\}$$

证明 为了方便起见，假设

$$\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_i t_j\right|; |s_i|, |t_j|\leqslant 1\right\} = 1.$$

我们看到，

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i, y_j)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i, y_j)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\left(x_i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right\|, \quad (\text{因}\|x_i\|\leqslant 1).$$

另一方面，对任 i，选 $x_i \in H$，$\|x_i\| = 1$，使

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right\| = \left(x_i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right),$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right\| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i, y_j)\right|,$$

故定理中第一个等式显然成立。

下面不妨设 $y_1, \cdots, y_n \in H$，使$\|y_i\| = 1$，$1\leqslant i\leqslant n$，且

$$|(a_{ij})|_{\mathscr{H}} = (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right\|.$$

令 $Y_n=\operatorname{span}(y_i)_{i=1}^n$，则 Y_n 是(至多)n维 Hilbert 空间，且(不妨设)$Y_n\cong l_2^n$。选 $x_1,\cdots,x_n\in S(l_2^n)$，使

$$\frac{|(a_{ij})|_{\mathscr{H}}}{1+\varepsilon}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i,y_j).$$

下面应用引理 6.1.16 估计上式右边。

$$\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i,y_j)\right|=\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}-1\right)^{-1}\left|\sum_{ij}a_{ij}(s_{x_i},s_{y_j})\right.$$

$$\left.+\sum_{ij}a_{ij}(\varphi_{x_i}-s_{x_i},\varphi_{y_j}-s_{y_j})\right|$$

$$\leqslant\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}-1\right)^{-1}\left(\int_{R^n}\left|\sum_{ij}a_{ij}s_{x_i}(z)s_{y_j}(z)\right|dG(z)\right.$$

$$\left.+|(a_{ij})|_{\mathscr{H}}\max_{ij}\|\varphi_{x_i}-s_{x_i}\|\cdot\|\varphi_{y_j}-s_{y_j}\|\right)$$

$$\leqslant\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}-1\right)^{-1}\left(1+|(a_{ij})|_{\mathscr{H}}\left(2-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right),$$

故

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}-1\right)\frac{|(a_{ij})|_{\mathscr{H}}}{1+\varepsilon}-\left(2-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)|(a_{ij})|_{\mathscr{H}}\leqslant 1,$$

由 ε 任意性，有

$$|(a_{ij})|_{\mathscr{H}}\leqslant\left(4\sqrt{\frac{2}{\pi}}-3\right)^{-1}=K_G.$$

证毕。

注　对复情况绝对常数记作 K_G^C。Pisier(P-1) 证明 $K_G^C\neq K_G$。K_G 的最佳值尚未知，目前知道的最好估计是 Krivine(Kr-1)得到的：

$$K_G\leqslant\frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}=1.782\cdots$$

现猜测这是最佳值，又 Grothendieck 证明 $K_G\geqslant\frac{\pi}{2}$。□

应用 Grothiendieck 不等式，我们可证明

定理 6.1.18　若 $1\leqslant p\leqslant 2$，则$L(\mathscr{L}^\infty,\mathscr{L}^p)=\prod_2(\mathscr{L}^\infty,\mathscr{L}^p)$。特别地，$L(c_0,l_p)=\prod_2(c_0,l_p)$。

证明　令 X 是 $\mathscr{L}_\lambda^\infty$ 空间，Y 是 $\mathscr{L}_\rho^\infty$ 空间，$T\in L(X,Y)$。我们将要证明，对任 $x_1,\cdots,x_N\in X$，有

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\|Tx_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant K_G\lambda\rho\|T\|\cdot C.$$

其中 $C=\sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}|x^*(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}};\ \|x^*\|\leqslant 1, x^*\in X^*\right\}$.

首先，我们看到，对任 $x^*\in X^*$，有

$$\sum_{k=1}^{N}|x^*(x_k)|^2\leqslant C^2\|x^*\|^2.$$

下面证明的想法是将 $(x_i)_{i=1}^N$ 放到 l_∞^m 中去，$(Tx_i)_{i=1}^N$ 放到 l_p^h 中去，然后对 c_0 与 l_p 之间算子进行讨论。

由于 X 是 $\mathscr{L}_\lambda^\infty$ 空间，故存在 $m\geqslant 1$ 及可逆算子 $S:l_\infty^m\longrightarrow Sl_\infty^m\subset X$，使 $(x_i)_{i=1}^N\subset Sl_\infty^m$，$\|S\|=1$，$\|S^{-1}\|\leqslant\lambda$。

令 $S^{-1}x_i=z_i$，$1\leqslant i\leqslant N$，从而 $(z_i)_{i=1}^N\subset l_\infty^m$，且

$$Sz_i=x_i,\ 1\leqslant i\leqslant N.$$

由于 $TSl_\infty^m\subset Y$，且 Y 是 $\mathscr{L}_\rho^p$ 空间，故存在 Y 的 h 维子空间 E 及可逆算子 $R:E\longrightarrow l_p^h$，使 $TSl_\infty^m\subset E$，$\|R\|=1$，$\|R^{-1}\|\leqslant\rho$。

这样，$S_0=RTS:l_\infty^m\longrightarrow l_p^h$，$(x_1,\cdots,x_N)\subset Sl_\infty^m$，

$$(Tx_1,\cdots,Tx_N)\subset R^{-1}l_p^h.$$

任取 $z^*\in l_1^m\simeq(l_\infty^m)^*$，则

$$\sum_{k=1}^{N}|z^*(z_k)|^2=\sum_{k=1}^{N}|z^*(S^{-1}x_k)|^2=\sum_{k=1}^{N}|(S^{-1})^*z^*(x_k)|^2$$
$$\leqslant C^2\|(S^{-1})^*z^*\|^2\leqslant C^2\lambda^2\|z^*\|^2. \tag{6.1}$$

下面先证明

$$\sum_{k=1}^{N}\|S_0z_k\|^2\leqslant C^2\lambda^2K_G^2\|S_0\|^2. \tag{6.2}$$

为此令 $(e_1,\cdots,e_m)$ 为 l_∞^m 的自然基，$(f_1,\cdots,f_h)$ 是 l_p^h 的自然基.

设 $S_0e_i=\sum_{j=1}^{h}a_{ij}f_j$，$1\leqslant i\leqslant m$，　$z_k=\sum_{i=1}^{m}z_{ik}e_i$，$1\leqslant k\leqslant N$，则对 $1\leqslant k\leqslant N$，

$$S_0 z_k = \sum_{i=1}^{m}{}' z_{ki} S_0 e_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{h}{}' z_{ki} a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{h}\left(\sum_{i=1}^{m}{}' z_{ki} a_{ij}\right) f_j.$$

由于 $1 \leqslant p \leqslant 2$，应用 $l_{2/p}$ 中三角不等式，有

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\|S_0 z_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{h}\left|\sum_{i=1}^{m}{}' z_{ki} a_{ij}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{h}\left(\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{m}{}' z_{ki} a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.3}$$

任取 $y^* = (b_1, \cdots, b_h) \in l_q^h$，$\|y^*\|_q = 1$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$b_j \geqslant 0$。

令 $u_i = (z_{1i}, \cdots, z_{Ni})$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则由(6.1)式知，

$$\|u_i\|_2 \leqslant C\lambda,$$

于是，

$$\sum_{j=1}^{h}\left(\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{m}{}' z_{ki} a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} b_j = \sum_{j=1}^{h}\left(\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{m}{}' z_{ki} b_j a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{j=1}^{h}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_j u_i\right\|_2 \tag{6.4}$$

因为对任 $|s_j| \leqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant h$；$|t_i| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant m$，

$$\left|\sum_{j=1}\sum_{i=1}^{m}{}' a_{ij} a_j s_j t_i\right| = \left|y_s^*\left(\sum_{i=1}^{m}{}' S_0 t_i e_i\right)\right|$$

$$\leqslant \|y_s^*\|\|S_0\|\left\|\sum_{i=1}^{m}{}' t_i e_i\right\|_\infty \leqslant \|S_0\|,$$

其中 $y_s^* = (b_1 s_1, \cdots, b_h s_h) \in l_p^h$。应用 Grothendieck 不等式，有

$$\sum_{j=1}^{h}\left\|\sum_{i=1}^{m}{}' a_{ij} b_j u_i\right\|_2 \leqslant K_G C\lambda\|S_0\|. \tag{6.5}$$

由(6.3)，(6.4)，(6.5)式及 $y^* = (b_1, \cdots, b_h)$ 的任意性，有

$$\sum_{k=1}^{N}\|S_0 z_k\|^2 \leqslant C^2\lambda^2 K_G^2\|S_0\|^2.$$

即(6.2)式成立。

最后，将(6.2)式还原到 X、Y 中不等式。

$$\sum_{k=1}^{N}\|Tx_k\|^2 = \sum_{k=1}^{N}\|R^{-1}S_0 z_k\|^2 \leqslant \rho^2\sum_{k=1}^{N}\|s_0 z_k\|^2$$

$$\leqslant \rho^2\lambda^2 K_G^2 \|T\|^2 C^2.$$

故$\left(\sum_{k=1}^{N}\|Tx_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_G \lambda\rho \|T\| C$，从而$T \in \prod^2(X,Y)$，且

$$\prod_2(T) \leqslant K_G \lambda \rho \|T\|.$$

证毕。

应用 Grothendieck 不等式还可证明下面著名的 Grothendieck 定理，从而进一步证明 c_0 的性质。

定义6.1.5 Banach 空间 X 称为具有 Grothendieck 性质，如果 $L(X,l_2)=\prod_1(X,l_2)$。

定理 6.1.19 $\mathscr{L}^1$ 空间具 Grothendieck 性质，特别地 L_1 具 Grothendieck 性质，l_1 具 Grothendieck 性质。

证明 令 X 是 $\mathscr{L}^1$ 空间，设 $x_1,\cdots,x_n \in X$，我们要证明，对任 $T \in L(X,l_2)$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\| \leqslant K_G \|T\| \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|;\|x^*\|\leqslant 1\right\}. \tag{6.6}$$

令
$$C=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|;\|x^*\|\leqslant 1\right\},$$

则任 $x^* \in X^*$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)| \leqslant C\|x^*\|. \tag{6.7}$$

由假设 X 是 $\mathscr{L}^1$ 空间，故 X 是一个 $\mathscr{L}^1_\lambda$ 空间，对某个 $\lambda>1$，因此，存在 $m>0$ 及 X 的 m 维子空间 X_m，及

$$G: l_1^m \longrightarrow X_m,$$

使 $(x_1,\cdots,x_n) \subset X_m$，$\|G\|=1$，$\|G^{-1}\|\leqslant\lambda$。

令 $y_1,\cdots,y_n \in l_1^m$，使 $Gy_i = x_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，设$(e_i)_{i=1}^m$为 l_1^m 的自然基，记 $y_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}e_j$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\| = \sum_{i=1}^{n}\|TGy_i\| = \sum_{i=1}^{n}\left\|TG\sum_{j=1}^{m}a_{ij}e_j\right\|$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}TGe_j\right\|. \tag{6.8}$$

为了应用 Grothendieck 不等式,只须计算.

$$\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_is_j\right|;|s_j|\leqslant 1,\ |t_i|\leqslant 1\right\}.$$

任取$(s_j)_{j=1}^{m}$,$(t_i)_{i=1}^{n}$,使 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|s_j|\leqslant 1$,$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|t_i|\leqslant 1$.

令 $y^*=(s_1,\cdots,s_m)\in l_\infty^m\cong(l_1^m)^*$,则$\|y^*\|_\infty\leqslant 1$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_is_j\right|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|t_i|\left|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}s_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}s_j\right|\\&=\sum_{i=1}^{n}|y^*(y_i)|=\sum_{i=1}^{n}|y^*G^{-1}x_i|\\&=\sum_{i=1}^{n}|(G^{-1})^*y^*(x_i)|\leqslant C\|(G^{-1})^*y^*\|\\&\leqslant C\|G^{-1}\|\leqslant C\lambda.\end{aligned}$$

应用 Grothendieck 不等式,由(6.8)式,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|=\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}TGe_j\right\|&\leqslant K_G\lambda C\sup_{1\leqslant j\leqslant m}\|TGe_j\|\\&\leqslant K_GC\lambda\|T\|.\end{aligned}$$

即 $T\in\prod_1(X,l_2)$,且$\prod_2(T)\leqslant K_G\lambda\|T\|$. 证毕

注 1　Grothendieck 证明 l_1 具 Grothendieck 性质. Lindenstrauss-Pelczynski 证明 $\mathscr{L}^1$ 空间具 Grothendieck 性质. □

注 2　S.V.Kisliakov(1976)(Ki-1) &G.Pisier(1978)(Pi-1)证明 $L_1/$自反子空间具 Grothendieck 性质. □

注 3　J.Bourgain(B-1) 证明 L_1/H^1 具 Grothendieck 性质. 剩下的Open 问题是:

(1) $L_1/$可分共轭子空间是否具 Grothendieck 性质?

(2) 对 L_1 的什么样更广一类子空间 M,L_1/M 具 Grothendieck 性质?□

注 4　此外 Lindenstrauss & Pelczynski(L-Pe-1)还证明若 X 具无条件基,且$L(X,Y)=\prod_1(X,Y)$,则 $X\approx l_1$,$Y\approx l_2$. □

由上面这个定理,可证明 l_1 具有唯一的正规化无条件基.

定理 6.1.20 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是 l_1 或 c_0 的正规化无条件基，则

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}\approx(e_n)_{n=1}^{\infty},$$

其中$(e_n)_{n=1}^{\infty}$是 l_1 或 c_0 的自然基。

证明 由附录 2 定义 2.3 知只须证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n<+\infty\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n<+\infty.$$

(1) l_1 情况。

设$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的无条件基常数为 M。

首先，显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n<+\infty\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n<+\infty.$$

另一方面，设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，使$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_n<+\infty$，由于$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是无条件基，故对任$(\lambda_n)\in c_0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n x_n<+\infty$。

令 $S:c_0\longrightarrow l_1$，$S(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n x_n$，由定理 6.1.18 知，

$$S\in L(c_0,l_1)=\prod\nolimits_2(c_0,l_1),$$

且

$$\prod\nolimits_2(S)\leqslant K_G\|S\|\geqslant K_G M\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\right\|,$$

因此（这里为了区分，记$(e_n')_{n=1}^{\infty}$为 c_0 的自然基），

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}&=\left(\sum_{i=1}^{n}\|Se_i'\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\prod\nolimits_2(S)\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(e_i')|^2\right)^{\frac{1}{2}};x^*\in l_1,\|x^*\|\leqslant1\right\}\\&\leqslant\prod\nolimits_2(S)\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|x^*(e_i')|;x^*\in l_1,\ \|x^*\|\leqslant1\right\}\\&=\prod\nolimits_2(S)\leqslant K_G M\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\right\|.\end{aligned}\tag{6.9}$$

令 $T:l_1\longrightarrow l_2$，$T\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i x_i\right)=(a_i)_{i=1}^{\infty}$，$\forall\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i x_i\in l_1$，由(6.9)式

知，T 是可以定义的，且 $T\in L(l_1,l_2)$，$\|T\|\leqslant K_G M$。由定理6.1.19，$T\in L(l_1,l_2)=\prod_1(l_1,l_2)$，且 $\prod_1(T)\leqslant K_G\|T\|\leqslant K_G^2 M$。故对任

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\in l_1,\text{有}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}\|Ta_n x_n\| \\ &\leqslant K_G^2 M\sup\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(a_n x_n)|\,;x^*\in l_\infty,\ \|x^*\|\leqslant 1\right\} \\ &\leqslant K_G^2 M\sup_{\theta_n=\pm 1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n a_n x_n\right\| \\ &\leqslant K_G^2 M^2\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\right\|<+\infty.\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n<+\infty.$$

(注意，其中用到对无条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$，有

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(z_n)|\,;\|x^*\|\leqslant 1,x^*\in X^*\right\}$$

$$\leqslant\sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n z_n\right\|\,;\ \theta_n=\pm 1\right\}\Bigg).$$

(2) c_0 情况。

由于 $l_1\not\hookrightarrow c_0$（定理1.2.3），容易看到，若 X 具无条件基 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 是相应的坐标泛函，且 $l_1\not\hookrightarrow X$，则 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基，从而相应的坐标泛函 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基（参考书（俞-1）p.142)。因此 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的相应坐标泛函 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 是 l_1 的基，并且是 l_1 的无条件基，且 $1\leqslant\|x_n^*\|\leqslant M$，对某个 $M>0$。由(1)的结果(这里为了区分，记 $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 为 l_1 的自然基)，$\left(\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|}\right)_{n=1}^{\infty}\approx(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$，从而

$(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n^*)_{n=1}^{\infty}$.

令 $T: l_1 \longrightarrow l_1, T\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^*, \forall (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1$. 则 T 为线性同胚，从而 $T^*: l_\infty \longrightarrow l_\infty$ 也是线性同胚，但 $T^* x_n = e_n$ (这里容易验证，对任 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n^* \in l_1$,

$$T^* x_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j^*\right) = x_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j T e_j^*\right) = x_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^*\right)$$

$$= a_n = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j^*\right)(e_n)\Big).$$

故 $T^*|_{c_0}: \overline{\text{span}}(x_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow c_0$ 为线性同胚，且 $T^* x_n = e_n$, 故

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}.$$

证毕.

注 l_2 的每个正规化无条件基也等价于它的自然基 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. 事实上，由平行四边形法则，应用归纳法，易证，对任 $(x_i)_{i=1}^{n} \subset l_2$, 有

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

由此容易得到，若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 l_2 的正规化无条件基，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n < +\infty.$$

即 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}$. □

令人惊奇的是仅有上述三个空间具有这种性质，即若Banach空间 X 在等价意义下具有唯一的正规化无条件基，则 X 或是 c_0, 或是 l_1, 或是 l_2 (参考书(L-T-1) p.118).

定义 6.1.6 实无限维 Banach 空间 X 称为 Lindenstrauss-Phelps 空间(LP 空间)，如果 ext$U(x^*)$是可数的.

注 Lindenstrauss & Phelps 证明若 X 是(实)无限维自反 Banach 空间，则 X 中每个有界闭凸集A, 若int $A \neq \emptyset$, 那么ext A 不可数(参考书(俞-1). p.193). □

定理 6.1.21 c_0 是 LP 空间。

证明 易见 $\mathrm{ext}U(l_1)=\{\pm e_i\}_{i=1}^{\infty}$，其中$(e_i)_{i=1}^{\infty}$是 l_1 的自然基，证毕。

关于 LP 空间，我们将在下面进一步讨论。

1984 年 G.A.Edgar & R.F.Wheeler〔E-W-1〕发表了一篇关于Banach 空间拓扑性质的文章，对 Banach 空间的拓扑性质进行了深入的讨论。近期内，引起了人们很大关注、文章中引入 Polish 空间等一系列定义。

定义 6.1.7 拓扑空间 Ω 称为 Polish 空间，若 Ω 同胚于一个可分完备度量空间，Banach 空间 X 称为 Polish 空间，如果 $(U(X),w)$是 Polish 空间。

定义 6.1.8 完全正则的 Hausdorff 空间 Ω 称为 Cěch 完备，如果 Ω 有一个开复盖完备序列$(\mathscr{U}_n)$（Ω中开集族列$\{\mathscr{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$称为完备序列，如果对 Ω 的任何具有限交性质（有限个集相交非空）的闭子集族 $\mathscr{F}$，如果对每个 n，存在 $F_n\in\mathscr{F}$，$U_n\in\mathscr{U}_n$，使 $F_n\subset U_n$，则$\bigcap\mathscr{F}(\equiv\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}}F)\neq\varnothing$）。Banach 空间 X 称为 Cěch 完备，如果$(U(X),w)$是 Cěch 完备的。

注 Polish 空间的引入是基于下面的动机：我们知道，

(1) $(U(X),w)$可度量化$\Longleftrightarrow X^*$是可分的。

(2) $(U(X),w)$紧可度量化$\Longleftrightarrow X^*$是可分自反的，那么何时$(U(X),w)$可完备度量化呢？拓扑空间中 Polish 空间这一概念正是一种合适的表达，关于这方面详细讨论见(E-W-1)。□

为了讨论 c_0 是不是 Polish 空间，先简要证明几个拓扑空间引理。

引理 6.1.22 可完备度量化拓扑空间 Ω 是 Cěch 完备的，特别地，Polish 空间必是 Cěch 完备空间。

证明 设(Ω,τ)为拓扑空间，(Ω,d)为完备度量空间，且$(\Omega,d)\sim(\Omega,\tau)$。

取 $\mathscr{U}_n=\left\{U;\ U\text{ 是 }\Omega\text{ 的开子集, }\operatorname{diam}U<\frac{1}{n}\right\}$.

显然，对任何 $\omega_0\in\Omega$, $U(\omega_0)=\left\{\omega\in\Omega,\ d(\omega,\omega_0)<\frac{1}{2n}\right\}$是含 ω_0的开集，$\operatorname{diam}U(\omega_0)<\frac{1}{n}$，由于 $\omega_0\in U(\omega_0)\in\mathscr{U}_n$，因此，$\mathscr{U}_n$ 是 Ω 的一个开复盖，对每个 n。

下面证明$(\mathscr{U}_n)_{n=1}^{\infty}$是完备序列，事实上，任取具有限交性质的闭集族 $\mathscr{F}$，满足对每个 n，存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$，$F_n\in\mathscr{F}$，有 $F_n\subset U_n$，

考虑 $W_n=F_1\cap\cdots\cap F_n$，则 $W_1\supset W_2\supset\cdots$，且 W_n 为非空闭集，$\operatorname{diam}W_n\leqslant\operatorname{diam}F_n\leqslant\operatorname{diam}U_n<\frac{1}{n}$，由于度量空间$(\Omega,d)$是完备的，故存在唯一元 $x\in\Omega$，使$\{x\}=\bigcap\limits_n F_n$。从而，$\{x\}=\bigcap\mathscr{F}$。事实上，任取 $F\in\mathscr{F}$，考虑 $W_n'=F\cap F_1\cap\cdots\cap F_n$，同上面证明即得$\bigcap\limits_n F_n\cap F=\{x\}$，故 $x\in F$，所以$\{x\}=\bigcap\mathscr{F}$。证毕。

定理 6.1.23 若 X 是 Banach 空间，则 X 是 Polish 空间 $\Longrightarrow X$ 是 Cěch 完备空间。

证明 将引理 6.1.22 应用于$(U(X),w)$即得，证毕。

引理 6.1.24 Cěch 完备拓扑空间 Ω 是 Baire 空间。

证明 任取 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i$ 为无处稠集；即 A 是第一纲集。

任取开集 G，要证 $G\cap A^c\neq\Phi$，即 $G\backslash A\neq\Phi$（从而 Ω 是Baire空间）。

由于 A_1 是无稠密的，故 $\exists x\in G\backslash\overline{A_1}$，又由 $\mathscr{U}_1$ 是 Ω 的开复盖，故可选 $U_1\in\mathscr{U}_1$，使 $x\in U_1$，则

$$x\in(G\backslash\overline{A_1})\cap U_1,$$

选 x_1 的开邻域 G_1，使

$$x\in\overline{G_1}\subset(G\backslash\overline{A_1})\cap U_1.$$

应用上述过程于 $G_1\backslash\overline{A_2}$，得开集 G_2，及 $U_2\in\mathscr{U}_2$，使得

$$\overline{G}_2 \subset (G_1 \backslash \overline{A}_2) \cap U_2 .$$

归纳定义$(G_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $G \supset \overline{G_1} \supset \overline{G_2} \supset \cdots$，$\overline{G_i} \cap A_i = \Phi$，$G_i \subset U_i$，显然，$(\overline{G}_n)_{n=1}^{\infty}$具有限交性质，由$(\mathscr{U}_n)_{n=1}^{\infty}$是完备序列，知

$$\bigcap_n \overline{G}_n \neq \Phi .$$

但$\bigcap_n \overline{G}_n \subset G \backslash A$，故 $G \backslash A \neq \Phi$。证毕。

定理 6.1.25 若 Banach 空间 x 是 Cěch 完备空间，则$(U(X), w)$是 Baire 空间。

证明 应用引理 6.1.24。证毕。

定理 6.1.26 c_0 不是 Polish 空间，c_0 不是 Cěch 完备空间，$(U(c_0), w)$不是 Baire 空间。

证明 由定理 6.1.23 及定理 6.1.25 知，只须证$(U(c_0), w)$不是 Baire 空间即可。

令

$$A_n = \left\{ x \in U(c_0);\ \ |x_k| < \frac{1}{n},\ \ \forall k \geqslant n \right\},$$

则 A_n 是 w 闭的，且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U(c_0),$$

下面证明 A_n 在$(U(c_0), w)$中无处稠密。

任取 $x_0 \in A_n$，及 x_0 的任何相对 w 邻域 $U(x_0; x_1^*, \cdots, x_k^*, \varepsilon) = \{ y \in U(c_0);\ |x_i^*(x_0) - x_i^*(y)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant k \}$。

令 $x_0 = (x_{0,j})_{j=1}^{\infty}$; $x_i^* = (x_{i,j}^*)_{j=1}^{\infty}$, $1 \leqslant i \leqslant k$。令

$$y_l = (y_{l,j})_{j=1}^{\infty},$$

$$y_{l,j} = \begin{cases} x_{0,j}, & j \neq n+l \\ \dfrac{2}{3}, & j = n+l \end{cases}$$

则 $y_l \in U(c_0)$，且

$$\max_{1\le i\le k}\sum_{j=1}^{\infty}|x_{i,j}(x_{0,j}-y_{l,j})|$$
$$=\max_{1\le i\le k}\left|x_{i,n+l}^{*}(x_{0,j})-\frac{2}{3}x_{i,n+l}^{*}\right|$$
$$\leqslant\max_{1\le i\le k}|x_{i,n+l}^{*}|\left(1+\frac{2}{3}\right).$$

当 l 充分大时，$y_l\in U(x_0;x_1^*,\cdots,x_k^*,\varepsilon)\setminus A_n$，即 A_n 是无处稠密的，从而 $(U(c_0),w)$ 不是 Baire 空间，证毕。

下面我们讨论含 c_0 的空间的性质。

(1) $c_0\not\hookrightarrow X\Longleftrightarrow w$ 无条件 Cauchy 级数是无条件收敛的，(定理 4.2.14)；

(2) $c_0\not\hookrightarrow X\Longleftrightarrow\Big($若$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty,\forall x^*\in\mathrm{ext}U(X^*)$，

则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$(无条件)收敛，

(定理 6.1.39)

(3) $c_0\hookrightarrow X^*\Longleftrightarrow l_1\overset{c}{\hookrightarrow}X\Longleftrightarrow l_\infty\hookrightarrow X^*\Longleftrightarrow l_\infty\overset{c}{\hookrightarrow}X^*$ (定理 6.1.27)；

(4) $c_0\not\hookrightarrow X\Longleftrightarrow c_0\not\hookrightarrow L_p(\mu,X),1<p<+\infty$ (K_W-2)。

(5) $c_0\not\hookrightarrow X\Longrightarrow L(C(\Omega),X)=WK(C(\Omega),X)$，其中 Ω 是紧 Hausdorff 空间(参考书(D-U-1)p.159)。

(6) 若 X 具无条件基$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，则

$c_0\not\hookrightarrow X\Longleftrightarrow(x_n)_{n=1}^{\infty}$是有界完备基$\Longleftrightarrow X$ 是 w 序列完备的(参考书(俞-1)p.137)。

(7) 若 $X\approx$LP 空间，则 X 继承含 c_0(定理 6.1.36)。

(8) $c_0\hookrightarrow X\Longrightarrow c_0\overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow}X$(定理 6.4.1)。

下面我们逐一进行研究。

定理 6.1.27 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) $c_0\hookrightarrow X^*$；

(2) $l_1\overset{c}{\hookrightarrow}X$；

(3) 存在 $Z\subset X^*$，使

(a) 存在(满)线性同胚 $T: Z\longrightarrow l_\infty$，使 T 还是 $\sigma(X^*, X)$ —— $\sigma(l_\infty, l_1)$ 连续。

(b) 存在投影 $P: X^*\longrightarrow Z$，使 P 还是 $\sigma(X^*, X)$——$\sigma(X^*, X)$ 连续；

(4) $l_\infty \overset{c}{\hookrightarrow} X^*$；

(5) $l_\infty \hookrightarrow X^*$。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $T: c_0\longrightarrow X^*$内的线性同胚，$(e_n)_{n=1}^\infty$表示 c_0 的自然基。

令 $S: X\longrightarrow l_1, Sx=(Te_i(x))_{i=1}^\infty$，则 $T^*|_{X}\hat{x}=Sx$，$\forall x\in X$。事实上，$T^*|_X\hat{x}(e_i)=\hat{x}(Te_i)=Te_i(x)$，故$Sx=T^*|_X\hat{x}$，$\forall x\in X$。

由于 T 是 1-1 的，故 T^* 是满映象，由于 $U(X)$在$U(X^{**})$中 w^* 稠，因此，$SU(X^*)$在 $T^*U(X^{**})$中 w^* 稠，且 $T^*U(X^{**})$是 l_1 中含 0 点的一个邻域，故存在常数 K，使得对每个 n，存在 $x_n\in X$，$\|x_n\|\leqslant K, Te_n(x_n)=1$，且

$$\sum_{i=1}^{n-1}|T_i(x_{n-1})|<\frac{1}{n},$$

因此，$\|Sx_n\|\geqslant 1, Sx_n(e_k)\longrightarrow 0, n\longrightarrow\infty, \forall k$。因而，由基序列选择原理(附录2，定理2.3)，存在子序列$(Sx_{n_k})_{k=1}^\infty$，使得

$$(Sx_{n_k})_{k=1}^\infty\approx(y_n)_{n=1}^\infty,$$

其中(y_n)是 l_1 的自然基$(e_n^*)_{n=1}^\infty$的块基。

由定理 1.2.1，$(y_n)_{n=1}^\infty\approx(e_n^*)_{n=1}^\infty$，且$[y_n]_{n=1}^\infty$在 l_1 中可补，因为$(y_n)_{n=1}^\infty$ 是由$(Sx_{n_k})_{k=1}^\infty$ 作适当扰动得到(由附录 2 定理 2.7 易见)，$(Sx_{n_k})_{k=1}^\infty\approx(e_n^*)_{n=1}^\infty$，且$[Sx_{n_k}]_{k=1}^\infty$在 l_1 中可补。

令 $P: l_1\longrightarrow[Sx_{n_k}]_{k=1}^\infty$为有界投影。

由$(Sx_{n_k})_{k=1}^\infty\approx(e_n^*)_{n=1}^\infty$，存在 $L, M>0$，使对任何$(a_k)_{k=1}^\infty\in l_1$，有

$$M\sum_{k=1}^\infty|a_k|\leqslant\left\|\sum_{k=1}^\infty a_kSx_{n_k}\right\|\leqslant L\sum_{k=1}^\infty|a_k|,$$

故对任$(a_k)_{k=1}^\infty\in l_1$，有

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_{n_k}\right\| \leqslant K\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leqslant KM^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_k S x_{n_k}\right\|$$

$$\leqslant KM^{-1}\|S\|\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_k S x_{n_k}\right\|,$$

即 S 限制在 $Y=[x_{n_k}]_{k=1}^{\infty}$ 上是可逆的，故 $Y\approx l_1$。

令 $P_1=S^{-1}PS: X\longrightarrow Y$，则 P_1 为有界投影，故 $l_1\overset{c}{\hookrightarrow} X$。证毕。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 $X=M\oplus N, M\overset{T}{\approx}l_1, P: X\longrightarrow X$ 为投影

$$PX=M, PN=0,$$

则

$$X^*=M^*\oplus N^*,$$

$$M^*\overset{T^*}{\approx}l_\infty,$$

$P^*: X^*\longrightarrow X^*$为投影，$P^*X^*=M^*$，$P^*N^*=0$，从而$P^*: X^*\longrightarrow M^*$ 是 w^*-w^* 连续的。证毕。

(3) $\Longrightarrow$ (4)，(4) $\Longrightarrow$ (5)，(5) $\Longrightarrow$ (1) 显然，证毕。

下面，我们对 LP 空间作一些深入的讨论。

首先，列出下列图表：

X 是 LP 空间

$\Downarrow$

$\operatorname{ext} U(X^*)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$，其中 K_n 为 X^* 中范紧集

$\Downarrow$ (1)

$X\approx LP$ 空间

$\Downarrow$ (2) $\Downarrow$ (3)

X^*是可分的 X 继承可补含 c_0。

(1) 即定理 6.1.34。

(2) 即定理 6.1.31。

(3) 即定理 6.1.36。

注 由于 c_0 具可分延拓性质，我们已经证明，若 $c_0\hookrightarrow$ 可分 X，则 $c_0\overset{c}{\hookrightarrow}$ 可分 X。从而，$l_1\overset{c}{\hookrightarrow}X^*$，因此对 LP 空间 X，有 $l_1\overset{c}{\hookrightarrow}X^*$。□

我们还证明

(4) LP 空间的子空间是 LP 空间(定理 6.1.35)。

(5) LP 空间的商空间不一定是 LP 空间。事实上 l_1 存在一个 w^* 闭子空间是严格凸的，从而，c_0 有一个商空间不是 LP 空间，但 c_0 是 LP 空间(定理 6.2.5 推论 2)。

为了证明上述结论，我们先证明一个有趣的重要定理(Haydon 定理)，若 K 是 X^* 的 w^* 紧凸集，使 $\text{ext}\,K$ 是范数可分的，则 $K=\overline{c_0}(\text{ext}\,K)$，从而 K 也是范数可分的。

定理 6.1.28 (Choquet-Bishop-deleeuw) 假设 K 是局部凸线性拓扑空间 X 的一个紧凸集，Σ 表示由 $\text{ext}\,K$ 及 K 的 Baire 子集生成的 σ 环，则对每个 $x_0\in K$，存在 Σ 上一个概率测度 μ_{x_0}，使

$$\mu_{x_0}(K)=\mu_{x_0}(\text{ext}\,K)=1.$$

且

$$x^*(x_0)=\int_K x^*(x)\,d\mu_{x_0},\ \forall x^*\in X^*.$$

我们略去这个定理的证明，读者可参见([P-1]，p.30)。

注 这个定理特别推出，若 X 是 Banach 空间，则对每个 $x_0\in U(X^*)$，存在 $\text{ext}\,U(X^*)$ 及 $(U(X^*),w^*)$ 的 Baire 子集生成的 σ 环 Σ 上的概率测度 $\mu_{x_0^*}$，使

$$\mu_{x_0^*}(U(X^*))=\mu_{x_0^*}(\text{ext}U(X^*))=1,$$

且

$$x_0^*(x)=\int_{U(X^*)} x^*(x)\,d\mu_{x_0^*},\ \forall x\in X.\ \square$$

定理 6.1.29(Rainwater 定理) 设 X 是赋范空间，$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，$x_0\in X$，$\sup_n\|x_n\|\leqslant K$，则

$$x_n\xrightarrow{w}x_0\Longleftrightarrow x^*(x_n)\longrightarrow x^*(x_0),\ \forall x^*\in \text{ext}U(X^*).$$

证明 只须证充分性。

因$(U(X^*),w^*)$是紧凸集，考虑$(U(X^*),w^*)$上连续函数全体,赋以范数$\|f\|_\infty=\max\{|f(x^*)|;x^*\in U(X^*)\}$,记为$C(U(X^*))$,显然,$C(U(X^*))$是 Banach 空间。

令 $Q:X\longrightarrow C(U(X^*))$, $Qx(x^*)=x^*(x)$, $\forall x^*\in U(X^*)$, $x\in X$,则 Q 是一个(内)线性等距。

任给 $x_0^*\in U(X^*)$, 由定理 6.1.28 注, 存在 ext $U(X^*)$ 及 $(U(X^*),w^*)$的 Baire 子集生成的 σ 环 Σ 上的一个概率测度μ,使 $\mu(U(X^*))=\mu(\text{ext}U(X^*))=1$,且

$$x_0^*(x)=\int_{U(X^*)}Qx(x^*)d\mu,\forall x\in X.$$

由于 $\mu(U(X^*))=\mu(\text{ext}\,U(X^*))=1$ 及假设

$$x^*(x_n)\longrightarrow x^*(x_0),\forall x^*\in \text{ext}U(X^*),$$

故

$$Qx_n\longrightarrow Qx_0,\ \mu\text{a.e},$$

且

$$|Q(x_n)(x^*)|\leqslant\|Qx_n\|=\|x_n\|\leqslant K,\forall x^*\in U(X^*),$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理知,

$$\begin{aligned}x_0^*(x_0)&=\int_{U(X^*)}Qx_0(x^*)d\mu=\lim_n\int_{U(X^*)}Qx_n(x^*)d\mu\\&=\lim_n x_0^*(x_n),\end{aligned}$$

由 x_0^* 是 $U(X^*)$中任意元,故 $x_n\xrightarrow{w}x_0$,证毕。

推论 1 设$(x_n)_{n=1}^\infty$是 Banach 空间X的有界序列,则$(x_n)_{n=1}^\infty$是 w Cauchy列,当且仅当 $\lim_n x^*(x_n)$存在,$\forall x^*\in\text{ext}U(X^*)$

证明 注意到$(x_n)_{n=1}^\infty$是 w Cauchy 的当且仅当对自然数的任何增加序列$(k_n)_{n=1}^\infty$, $(j_n)_{n=1}^\infty$, $k_n<j_n$, $\forall n$,有

$$x_{k_n}-x_{j_n}\xrightarrow{w}0,$$

应用 Rainwater 定理即可得所要结论。证毕。

定理 6.1.31(Haydon-Bourgin) 设 X 是一个 Banach 空

间，若 K 是 X^* 的 w^* 紧凸子集，如果 ext K 是范数可分的，则 K 是范数可分的，并且 K 具 RNP、K 具 KMP；特别地，

$$K=\overline{c_0}(\text{ext}K).$$

证明　令 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 ext K 的范数稠集。

任给 $x_0^*\in K$。由定理 6.1.28（Choquet-Bishop-deleeuw 定理），在由 ext K 及 (K,w^*) 的 Baire 子集生成的 σ 环 Σ 上存在一个概率测度 μ，使得 μ 的重心在 x^*（即，

$$x_0^*(x)=\int_K x^*(x)d\mu,\quad \forall x\in X\Big),$$

且

$$\mu(\text{ext}K)=1.$$

对任 $\varepsilon>0$，令 $B_\varepsilon(x_i^*)=\{x^*\in X^*;\|x^*-x_i^*\|<\varepsilon\}$。

由于 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(B_\varepsilon(x_i^*)\cap K)\supset \text{ext}\,K$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(B_\varepsilon(x_i^*)\cap K)$ 是 w^*F_σ 集，故

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B_\varepsilon(x_i^*)\cap K)\Big)=1.$$

对每个 n，令

$$C_n=\Big(\overline{B}_\varepsilon(x_n^*)\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}\overline{B}_\varepsilon(x_i^*)\Big)\cap K,$$

$$\mu_n=\begin{cases}\delta_{x_n^*}(x_n^*\text{ 的点测度}),\text{当 }\mu(C_n)=0\text{ 时},\\(\mu(C_n))^{-1}\mu|_{C_n},\quad\text{当 }\mu(C_n)\neq 0\text{时},\end{cases}$$

则 μ_n 的重心 $y_n^*\in\overline{B}_\varepsilon(x_n^*)\cap K$。事实上，当 $\mu(C_n)=0$ 时，$\mu_n=\delta_{x_n^*}$ 的重心 $x_n^*\in\overline{B}_\varepsilon(x_n^*)\cap K$；当 $\mu(C_n)\neq0$ 时，μ_n 的重心$y_n^*\in\overline{co}^*(C_n)\subset\overline{B}_\varepsilon(x_n^*)\cap K$，详细证明见本定理后注。

因此，当 n 充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(C_i)\neq0$，且

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)y_i^*-\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)x_i^*\Big\|$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\|y_i^*-x_i^*\|<\varepsilon.$$

利用 μ_n 的重心是 y_n^* 这一事实，我们得到，对任 $x\in X$，$\|x\|\leqslant 1$，

$$\left| x_0^*(x)-\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)y_i^*(x)\right|$$

$$\leqslant \sup\{\|x^*\|;x^*\in K\}\mu\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}(B_\varepsilon(x_i)\cap K)\right),$$

故当 n 充分大时，有

$$\left\|x_0^*-\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)y_i^*\right\|<\varepsilon.$$

所以，$x_0^*\in\overline{co}(\mathrm{ext}K)$，即 $K=\overline{co}(\mathrm{ext}K)$。再根据 $\mathrm{ext}\,K$ 是范数可分的，得到 K 是范数可分的。

下面证明 K 具 RNP（等价地，K 的每个有界闭凸子集 B 有一个 denting 点）。任取 K 的闭凸子集 B，令 $A=\overline{B}^*$（B 的 w^* 闭包），由 Krein-Milman 定理知，$\mathrm{ext}\,A\neq\Phi$，因为 K 是范数可分的，故 A 也是范数可分的。由 Namioko 定理（见 Na-1），$w^*PC(A)\cap\mathrm{ext}\,A$ 是 $\mathrm{ext}\,A$ 的 w^* 稠 G_δ 集。（其中 $w^*PC(A)$ 表示恒等映象 $I:(A,\ w^*)\longrightarrow(A,\ \|\cdot\|)$ 的连续点全体），显然，$w^*PC(A)\subset B$。

任取 $x_0^*\in w^*PC(A)\cap\mathrm{ext}\,A$，对任何 $\varepsilon>0$，存在 x^* 的 w^* 开集 W，使 $x_0^*\in W\cap A$，且 $\mathrm{diam}(W\cap A)<\varepsilon$。

由于 $A\backslash W$ 是 w^* 紧集，且 $x_0\in\mathrm{ext}\,A$，由 Krein-Milman 定理立即得到 $x_0^*\notin\overline{co}^*(A\backslash W)$，（否则

$$x_0^*\in\overline{co}^*(A\backslash W)\cap\mathrm{ext}\,A\subset\mathrm{ext}\,\overline{co}^*(A\backslash W)\subset A\backslash W,$$

矛盾！）。但是

$$\overline{co}(B\backslash\overline{B}(x_0^*,\varepsilon))\subset\overline{co}(A\backslash W)\subset\overline{co}^*(A\backslash W),$$

其中 $$\overline{B}(x_0^*,\varepsilon)=\{y^*\in X^*;\|y^*-x_0^*\|\leqslant\varepsilon\}.$$

因此，$x_0^*\notin\overline{co}\,(B\backslash\overline{B}(x_0^*,\varepsilon))$，同时 $x_0^*\in w^*PC(A)\subset B$，由 ε 的任意性，知 x_0^* 是 B 的一个 denting 点。再根据 B 的任意性知，K 具 RNP。由于 denting 点必是端点，故 K 具 KMP（K 的每个有界闭凸子集 B，有

$$B=\overline{co}(\text{ext } B);$$

等价地，K 的每个有界闭凸子集 B，有 ext $B\neq\Phi$。）。证毕。

注 我们证明当 $\mu(C_n)\neq 0$ 时，μ_n 的重心 $y_n^*\in\overline{co}^*(C_n)$。事实上，只须证

$$\overline{co}^*(C_n)\cap\left(\bigcap_{x\in X}\left\{x^*;\ x^*(x)=\int_{C_n}y^*(x)d\mu_n(y^*)\right\}\neq\Phi.\right.$$

由于

$$\left\{x^*\in X^*;x^*(x)=\int_{C_n}y^*(x)d\mu_n(y^*)\right\}$$

是 w^* 闭的，且 $\overline{co}^*(C_n)$ 是 w^* 紧的，因此，只须证明，对每个 m，有

$$\overline{co}^*(C_n)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}\left\{x^*;x^*(x_i)=\int_{C_n}y^*(x_i)d\mu_n(y^*)\right\}\neq\Phi.\right.$$

令连续线性算子 $T:(X^*,w^*)\longrightarrow R^m$

$$Tx^*=(x^*(x_1),\cdots,x^*(x_m)),$$

由于 $\overline{co}^*(C_n)$ 是 w^* 紧凸集，故 $T(\overline{co}^*(C_n))$ 是 R^m 中紧凸集，若 $\left(\int_{C_n}y^*(x_i)d\mu_n(y^*)\right)_{i=1}^{m}\in T\left(\overline{co}^*(C_n)\right)$，则存在 $x^*\in\overline{co}^*(C_n)$，使

$$x^*(x_i)=\int_{C_n}y^*(x_i)d\mu_n'(y^*),i=1,\cdots,m,$$

故上述交集非空。下面用反证法，否则存在

$$a=(a_1,\cdots,a_m)\in(R^m)^*,$$

使

$$\begin{aligned}
\sup\{a(Ty^*);y^*\in\overline{co}^*(C_n)\}&<\sum_{i=1}^{m}a_i\int_{C_n}y^*(x_i)d\mu_n(y^*)\\
&=\int_{C_n}y^*\left(\sum_{i=1}^{m}a_ix_i\right)d\mu_n(y^*)\leqslant\sup\left\{y^*\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right);y^*\in C_n\right\}\\
&=\sup\left\{y^*\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right);\ y^*\in\overline{co}^*(C_n)\right\}\\
&=\sup\{a(Ty^*);y^*\in\overline{co}^*(C_n)\},
\end{aligned}$$

矛盾！证毕。□

定理 6.1.33 若 Banach 空间 X，使得 $\text{ext}\,U(X^*)$ 是范数可分的，则 X^* 是范数可分的，从而 X^* 具 RNP。

证明　由定理 6.1.32 立即得到。证毕。

定理 6.1.34(Kadec-Fonf)　设 X 是实无限维 Banach 空间，$\text{ext}\,U(X^*)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$，其中 K_n 为 X^* 中范紧子集，则 $X\approx$LP 空间。

证明　由定理 6.1.31 知，X^* 是可分的，且

$$U(X^*)=\overline{co}(\text{ext}U(X)).$$

我们不妨假设，对任何 $n, K_n\subset U(X^*)$（否则可取

$$K_n'=K_n\cap U(X^*)).$$

取 $\varepsilon_n>0, \varepsilon_1<1$, $\varepsilon_n\searrow 0$（递减趋于 0）。任取 K_n 的有限 $\frac{\varepsilon_n}{2}$ 网 F_n。

令
$$|||x|||=\sup_n\{|(1+\varepsilon_n)f(x)|; f\in F_n\},$$

$$V=\{x\in X, |||x|||\leqslant 1\}, V^*=\{X^*\in X^*; |||x^*|||\leqslant 1\}.$$

易见，对任 $x\in X$，

$$\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant(1+\varepsilon_1)\|x\|.$$

且

$$|||x^*|||\leqslant\|x^*\|, \forall x^*\in X^*.$$

我们还有 $|||x^*|||<\|x^*\|, \forall x^*\in X^*$，事实上，否则存在 $x_0^*\in X^*$，使 $|||x_0^*|||=\|x_0^*\|=1$，取 $\Phi_0\in X^{**}$，使

$$\Phi_0(x_0^*)=|||x_0^{**}|||=|||\Phi_0|||=1.$$

则　$1=\Phi_0(x_0^*)\leqslant\|\Phi_0\|\cdot\|x_0^*\|=\|\Phi_0\|\leqslant|||\Phi_0|||=1$，从而，

$$\|\Phi_0\|=|||\Phi_0|||=1,$$

由于

$$U(X^*)=\overline{co}(\text{ext}U(X^*)),$$

故存在 $x_1^*\in\text{ext}U(X^*)$，使 $\Phi_0(x_1^*)=1$（实际上这里用到 X^* 具 RNP）。设 $x_1^*\in K_n$，对某个 n。从而存在 $g\in F_n$，使

$$\|x_1^* - g\| < \frac{\varepsilon_n}{2},$$

故

$$\Phi_0(g) > 1 - \frac{\varepsilon_n}{2},$$

因此，

$$\Phi((1+\varepsilon_n)g) > (1+\varepsilon_n)\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right) > 1.$$

由于

$$|||(1+\varepsilon_n)g||| \leqslant 1,$$

故

$$1 = |||\Phi_0||| \geqslant \Phi_0((1+\varepsilon_n)g) > 1.$$

矛盾！故$|||x^*||| > \|x^*\|, \forall x^* \in X^*$.

由$|||\cdot|||$的定义，$V^* = \overline{co}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\pm(1+\varepsilon_n))F_n\right)$，应用 Krein-Milman 定理，

$$\text{ext } V^* \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\pm(1+\varepsilon_n))F_n}^*,$$

我们有

$$\text{ext } V^* = (\text{ext } V^*) \cap \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\pm(1+\varepsilon_n))F_n\right)}^*$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(\pm(1+\varepsilon_n)F_n).$$

事实上，因为 X^* 是可分的，故(V^*, w^*)可度量化，任取

$$(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(\pm(1+\varepsilon_n))F_n,$$

$$u_k \xrightarrow{w^*} x^*,$$

若$(u_k)_{k=1}^{\infty}$重复在某个F_{n_0}中出现，则 $x_0^* \in \pm F_{n_0}$，否则存在$(u_k)_{k=1}^{\infty}$的子列$(v_k)_{k=1}^{\infty}$，使 $v_k \in (\pm(1+\varepsilon_{n_k}))F_{n_k}$，从而

$$\|x^*\| \leqslant \lim_k \|v_k\| \leqslant 1,$$

因此，$|||x^*||| < 1$，从而 $x^* \notin \text{ext}V^*$，$\therefore$ $\text{ext}V^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(\pm(1+\varepsilon_n))F_n$.

即$(X,⦀\cdot⦀)$是 LP 空间。证毕。

定理 6.1.35 LP 空间的子空间仍是 LP 空间。

证明 只须证对任何 Banach 空间 X 的闭子空间 M,有

$$\text{ext}\, U(M^*)\subset\{f|_M; f\in \text{ext}U(X^*)\}.$$

事实上,任取 $y^*\in \text{ext}\, U(M^*)$,

令 $A=\{x^*\in S(X^*), x^*|_M=y^*\}$, 则 A 是 X^* 中非空 w^* 闭凸集,从而 $\text{ext}\, A\neq\Phi$,易见 $\text{ext}\, A\subset\text{ext}U(X^*)$ 故取 $f\in\text{ext}A$,则 $f\in\text{ext}U(X^*)$, $f|_M=y^*$。证毕。

定理 6.1.36 (Fonf) 若 $X\approx$LP 空间,则 X 继承含 c_0。

证明 由定理 6.1.33 知,只须证明 $c_0\subset\!\!\to$LP 空间 X。

令
$$\text{ext}U(X^*)=\{\pm x_n^*\}_{n=1}^{\infty}.$$

选 $\varepsilon_n>0, \varepsilon_1<1, \varepsilon_n\searrow 0$, 令

$$⦀x⦀=\sup_n\{(1+\varepsilon_n)|x_n^*(x)|\}, \forall x\in X.$$

$$V=\{x\in X; ⦀x⦀\leqslant 1\}, V^*=\{x^*\in X^*; ⦀x^*⦀\leqslant 1\}.$$

同定理 6.1.35 证明知,

$$\|x\|\leqslant ⦀x⦀\leqslant(1+\varepsilon_1)\|x\|, \forall x\in X,$$

$$⦀x^*⦀<\|x^*\|, \forall x^*\in X^*.$$

且
$$\text{ext}V^*\subset\{\pm(1+\varepsilon_n)x_n^*\}_{n=1}^{\infty}.$$

令 $\text{ext}\, V^*=\{\pm h_n\}_{n=1}^{\infty}$,也易见(同定理 6.1.35 证明),若

$$h_0=w^*\lim_k h_{n_k},$$

则$⦀h_0⦀<1$。

由定理 6.1.35 证明知,对 X 的任何子空间 M,有

$$\text{ext}V^*(M)\subset\{\pm h_n|_M\}_{n=1}^{\infty},$$

其中 $V^*(M)=\{x^*\in M^*; ⦀x^*⦀\leqslant 1\}$。对 X 的任何有限维子空间 E,还存在 n_0,使

$$\text{ext}V^*(E)\subset\{\pm h_n|_E\}_{n=1}^{n_0}.$$

事实上,假若 $\text{ext}\, V^*(E)$有可列个端点,则存在 $g\in X^*, \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\theta_{n_i}=\pm 1\}_{i=1}^{\infty}$,使

$$\theta_{n_i} h_{n_i} \xrightarrow{w^*} g,$$

从而$\|g\|<1$。但另一方面$\|\theta_{n_i} h_{n_i}|_E\|=1$，

$$\theta_{n_i} h_{n_i}|_E \xrightarrow{w^*} g|_E,$$

由于 $\dim E<+\infty$，故

$$\theta_{n_i} h_{n_i}|_E \xrightarrow{\|\cdot\|} g|_E,$$

故
$$\|g|_E\|=1,$$
而
$$\|g|_E\|\leqslant\|g\|<1.$$

矛盾！故存在 n_0，使

$$\mathrm{ext}V^*(E)\subset\{\pm h_n|_E\}_{n=1}^{n_0}.$$

下面将归纳构造$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$。

取$\|x_1\|=1$，取 h_{n_1}，使$|h_{n_1}(x_1)|=1$，取 $x_2\in{}^{\perp}[h_1,\cdots,h_{n_1}]$，$\|x_2\|=1$。令 $E_2=[x_1,x_2]$，令 $n_2>n_1$，使

$$\mathrm{ext}V^*(E_2)\subset(h_1|_{E_2},\cdots,h_{n_2}|_{E_2}),$$

取 $x_3\in{}^{\perp}[h_1,\cdots,h_{n_2}]$，$\|x_2\|=1$，继续下去，得$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，易见$(x_n)_{n=1}^{\infty}$关于$(X,\|\cdot\|)$是单调基序列。

令 $X_1=[x_n]_{n=1}^{\infty}$，$V_1^*=V^*(X_1)=\{x^*\in X_1^*;\|x^*\|\leqslant1\}$，则

$$\mathrm{ext}\ V_1^*=(\pm g_i)_{i=1}^{\infty}\subset(h_n|_{X_1}).$$

由$(x_n)_{n=1}^{\infty}$构造知，对任 n，$\exists k$，使得当 $i\geqslant k$ 时，$g_n(x_i)=0$，并且，同前面论证，知道若 $g_{i_k}\xrightarrow{w^*}g_0$，则$\|g_0\|<1$。

下面将构造序列$(\eta_i x_i)_{i=1}^{\infty}$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x^*(\eta_i x_i)|<+\infty,\ \forall x^*\in X^*,$$

但$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i$ 不是无条件收敛的。由 Bessaga-Pelczynski 定理知 $c_0\hookrightarrow X$。

实际上，我们构造$(\eta_i x_i)_{i=1}^{\infty}$，使

$$\sup_n\left\{\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i\right\|;\alpha_1,\cdots,\alpha_n=\pm1\right\}\right\}<2.$$

(从而$\sum_{i=1}^{\infty}|x^*(\eta_i x_i)|<+\infty, \forall x^*\in X^*$)。

令 $\eta_1=1$。设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 已构造好，使

$$\sup_{\alpha_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i\right\|<2.$$

且存在 $\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_n^{(n)}$，$\alpha_i^{(n)}=1$ 或 -1，使

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}\eta_i x_i\right\|>\left\|\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{(n)}\eta_i x_i\right\|.$$

接着构造 η_{n+1}。为此，令

$$\beta_{n+1}=\min_{\substack{\alpha_i=\pm1\\1\leq i\leq n+1}}\left\{\max\left\{h\geq0;\ \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i+\alpha_{n+1}h x_{n+1}\right\|\right.\right.$$
$$\left.\left.=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i\right\|\right\}\right\}$$

因为，

$$\sup_{\substack{\alpha_i=\pm1\\1\leq i\leq n+1}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i+\alpha_{n+1}\beta_{n+1}x_{n+1}\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i\right\|<2,$$

故可选 $\delta_{n+1}>0$，使

$$\sup_{\substack{\alpha_i=\pm1\\1\leq i\leq n+1}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i+\alpha_{n+1}(\beta_{n+1}+\delta_{n+1})x_{n+1}\right\|<2,$$

令 $\eta_{n+1}=\delta_{n+1}+\beta_{n+1}$，则

$$\sup_{\substack{\alpha_i=\pm1\\1\leq i\leq n+1}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i x_i+\alpha_{n+1}\eta_{n+1}x_{n+1}\right\|<2,$$

且存在 $\alpha_1^{(n+1)},\cdots,\alpha_{n+1}^{(n+1)}$，$\alpha_i^{(n+1)}=1$ 或 -1，使

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n+1)}\eta_i x_i\right\|<\left\|\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i^{(n+1)}\eta_i x_i\right\|$$

我们要证明$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i$ 不是无条件收敛的。反证。若$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i$ 是无条件收敛的，

令 $K=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i x_i;\ \alpha_i=\pm1\right\}$，则 K 是 X_1 中紧集。

由于$\|\eta_1 x_1\|=1$，及$(x_i)_{i=1}^{\infty}$关于$\|\cdot\|$是单调基，故

$$K \subset \{x \in X_1;\ \|x\| \geqslant 1\}.$$

下面证明对任何紧集 $A \subset \{x \in X_1; \|x\| \geqslant 1\}$，存在 N_0，使得对任何 $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i \in A$，有 $x = \sum_{i=1}^{N_0} t_i x_i$. (6.16)

事实上，由于 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是关于 $\|\cdot\|$ 的单调基，故对任何 $x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$，任何 n，有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \right\| \leqslant \|x\|.$$

因此只须证存在 N_0，使

$$\|x\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{N_0} t_i x_i \right\|.$$

不妨设 $g_i \in \mathrm{ext}\, V^*(X_1)$（或者取 $-g_i$），使

$$\|x\| = g_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right).$$

由 $\{g_n\}$ 性质知，

$$\|x\| = g_i\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right) = g_i\left(\sum_{j=1}^{i} t_j x_j\right) \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{i} t_j x_j \right\|.$$

下面只须说明对任何 $x \in A$，相应的 $i < N_0$，对某个 N_0 即可。若不然，存在 $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$，使

$$y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y_0 \in A,$$

且存在

$$(g_{i_n}) \subset \mathrm{ext}\, V^*(X_1),\ (g_{i_n} \neq g_{i_m},\ m \neq n).$$

满足

$$g_{i_n}(y_n) = \|y_n\|,$$

且
$$g_{i_n} \xrightarrow{w^*} g_0.$$

由 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ 的性质知，$\|g_0\| < 1$。

因此，

$$1 \leqslant \|y_0\| = \lim_n \|y_n\| = \lim_n g_{i_n}(y_n) = g_0(y_0) < \|y_0\|,$$

矛盾！所以(6.16)成立。

将(6.1)应用于紧集 K，得

$$\left\|\sum_{i=1}^{N_0+1}\alpha_i^{(N_0+1)}\eta_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{N_0}\alpha_i^{(N_0+1)}\eta_i x_i\right\|,$$

这又与 $(\alpha_i^{(N_0+1)})_{i=1}^{N_0+1}$ 选取矛盾！故 $\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i$ 不是无条件收敛的。证毕。

注　由于 c_0 具可分延拓性质，因此，从定理 6.1.36 我们实际上得到：若 $X\approx$LP 空间，则 X 继承可补含 c_0。□

引理 6.1.37　设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的正规化基，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty, \forall x^*\in \mathrm{ext}U(X^*),$$

则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基。

证明　若不然，则存在 $x_0^*\in X^*$，及 $u_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i x_i$，$\|u_n\|=1$，使 $x_0^*(u_n)\not\longrightarrow 0$。

但 $a_i=x_i^*(u_n)$，$p_n\leqslant i<p_{n+1}$，故 $|a_i|\leqslant 2K$，其中 K 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数，从而

$$|x^*(u_n)|=\left|\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i x^*(x_i)\right|\leqslant 2K\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}|x^*(x_i)|.$$

根据条件，$\sum_{i=1}^{\infty}|x^*(x_i)|<+\infty, \forall x^*\in \mathrm{ext}\,U(X^*)$，故

$$x^*(u_n)\longrightarrow 0, \forall x^*\in \mathrm{ext}\,U(X^*).$$

应用 Rainwater 定理，得到

$$x^*(u_n)\longrightarrow 0, \forall x^*\in X^*,$$

这与 $x_0^*(u_n)\not\longrightarrow 0$ 矛盾！证毕。

定理 6.1.38　若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的正规化基，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty, \forall x^*\in \mathrm{ext}\,U(X^*),$$

则 $c_0\subset\!\!\!\rightarrow X$。

证明　由引理 6.1.37，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的相应坐标泛函 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的基。

令 $T: l_1 \longrightarrow X^*: T(t_n)_{n=1}^{\infty} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n^*$，则 T 是1-1有界线性算子，且 $Te_n = x_n^*$，{其中$e_n\}_{n=1}^{\infty}$是 l_1 的自然基。

若 $T|[e_n]_{n\geq N}$ 是一个线性同胚，对某个 N，则

$$l_1 \approx [e_n]_{n\geq N_n} \approx [x_n^*]_{n\geq N}.$$

容易看到$[x_n]_{n\geq N} \approx c_0$。从而 $c_0 \hookrightarrow X$。

如果上述线性同胚不存在，则容易得到 l_1 的正规化块基列 $\left\{u_n = \sum\limits_{i=p_n}^{q_n} C_i e_i\right\}_{n=1}^{\infty}$，使$\|Tu_n\| < 2^{-n}$。因此，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$等价于$\{e_n\}_{l_1}$。

令 $M = [u_n]_{n=1}^{\infty}$，则 $TU(M)$ 是 X^* 中相对紧子集。

令

$$h_n = Tu_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} c_i x_i^*,$$

$$y_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} (\mathrm{sgn} c_i) x_i,$$

$$Y = [y_n]_{n=1}^{\infty},$$

$$\bar{h}_n = h_n|_Y,$$

则$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 的基，且$\{y_n, \bar{h}_n\}$为双正交泛函。

应用引理6.1.37，容易看到，$\{\bar{h}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y^* 的基。

令 $K_m = \left\{x^* \in X^*; \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n(x_n)| \leqslant m\right\}$，由假设知，

$$\mathrm{ext}\, U(X^*) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

如果 $x^* \in K_m$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(y_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \leqslant m,$$

又 $x^*|_Y \in Y^*$，从而

$$x^*|_Y = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(y_n) \bar{h}_n,$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^*(y_n) h_n = T\sum_{n=1}^{\infty} x^*(y_n) u_n \in mTU(M)$$

因此，$$x^*|_Y=\sum_{n=1}^{\infty}x^*(y_n)\bar{h}_n\in(mTU(M))|_Y,$$
我们得到，
$$\begin{aligned}\text{ext}\,U(Y^*)&\subset\{x^*|_Y;x^*\in\text{ext}U(X^*)\}\subset\left\{x^*|_Y;x^*\in\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m\right\}\\&\subset\bigcup_{m=1}^{K}\{x^*|_Y;\ x^*\in K_m\}\subset\bigcup_{m=1}^{K}(mTU(M))|_Y\\&\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\overline{(mTU(M))|_Y}\end{aligned}$$
由于 $\overline{mTU(M)|_Y}$ 是 Y^* 中范紧子集，应用 Kadec-Fonf 定理（定理 6.1.34）及 Fonf 定理（定理 6.1.36）知，
$$c_0\subset\!\!\to Y,\text{更有 }c_0\subset\!\!\to X。$$证毕。

定理 6.1.39(Elton) 设 X 是 Banach 空间，则
$c_0\not\subset\!\!\to X\Longleftrightarrow$任何$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty,\forall x\in\text{ext}U(X^*),$$
则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是收敛的（无条件收敛）。

证明　若 $c_0\subset\!\!\to X$，则 c_0 的自然基$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的线性同胚象不满足假设条件，故充分性得证。

反之，若存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty,\forall x^*\in\text{ext}U(X^*),$$
但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是发散的。

我们容易得到一列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，使
$$\|y_n\|\geqslant\varepsilon>0,\forall n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(y_n)|<+\infty,\forall x^*\in\text{ext}U(X^*).$$
利用基序列构造方法（注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(y_n)|<+\infty;\ \forall x^*\in \mathrm{ext}U(X^*),$$

及
$$\|x\|=\sup\{|x^*(x)|;x^*\in \mathrm{ext}U(X^*)\})$$

可得到$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$的子序列$\{y_{n_i}\}$，它是基序列，仍有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x^*(y_{n_i})|<+\infty,\ \forall x^*\in \mathrm{ext}U(X^*),$$

利用条件$\|y_n\|\geq\varepsilon>0$，$\forall n$，知$\left\{z_i=\frac{y_{n_i}}{\|y_{n_i}\|}\right\}_{i=1}^{\infty}$是正规化基序列，

且
$$\sum_{i=1}^{\infty}|x^*(z_i)|<+\infty,\ \forall x^*\in \mathrm{ext}U(X^*).$$

应用定理6.1.38，知$c_0\subset\!\!\to X$。证毕。

注 Fonf(F-2)最近还证明

(1) 若$c_0\not\subset\!\!\to X$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$使

$$\sup_n|x^*(x_n)|<+\infty,\ \forall x^*\in \mathrm{ext}U(X^*),$$

则
$$\sup_n\|x_n\|<+\infty;$$

反之若X的每个可分子空间Y，有$c_0\subset\!\!\to Y$，则X上存在等价范数$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，及$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使

$$\sup_n|x^*(x_n)|<+\infty,\ \forall \mathrm{ext}U((X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)^*),$$

但
$$\sup_n|\!|\!|x_n|\!|\!|=+\infty.$$

(2) 若$c_0\not\subset\!\!\to X$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使

$$x^*(x_n)\longrightarrow x^*(x_0),\ \forall x^*\in \mathrm{ext}U(X^*),$$

则
$$x_n\xrightarrow{w}x_0.\ \square$$

关于LP空间的商空间未必是LP空间见定理6.2.4。

§2 l_1及含l_1的空间

l_1是重要的经典Banach空间，它具有许多特殊性质，其中一部分我们已经证明过，为了便于参考，我们将这些性质一起归纳，

并再证明若干另外的性质。

(1) l_1 是 Prime 空间(定理 1.2.6);

(2) l_1 的自然基是有界完备的、并不是收缩的;

(3) l_1 具 RNP, KMP、(推论 2.3.9);

(4) l_1 具 Schur 性质 (从而是 DP 空间, 也是 w 序列完备的(定理 6.1.11);

(5) l_1 不是 Asplund 空间 (定理 6.2.1);

(6) l_1 具 wBSP (定理 6.2.2);

(7) l_1 不是 B 凸的 (从定义直接可得);

(8) l_1 没有无限维自反子空间 (由于 Schur 空间没有无限维自反子空间);

(9) l_1 的每个正规化无条件基与自然基等价 (定理 6.1.20);

(10) l_1 没有无限维 LUR 空间 (定理 6.2.8);

(11) l_1 的每个严格凸子空间是 MLUR (定理 6.2.7);

(12) 每个可分 Banach 空间是 l_1 的商空间 (定理 1.1.5);

(13) l_1 有一个无限维 w^* 闭严格凸子空间 (定理 6.2.4);

(14) $L(l_1, l_2) = \prod_2(l_1, l_2)$, (定理 6.1.19);

(15) l_1 是可分的共轭空间(具可分共轭的一切性质);

(16) l_1 是 $\mathscr{L}^{1}_{1+}$ 空间(定理 5.4.3);

(17) $\exists T \in L(l_1, l_1)$, 使 T 不具不变子空间 (见(Be-1));

(18) X 具 RNP 当且仅当每个 $T \in L(L_1(M), X)$ 因子分解通过 l_1 空间 (定理 2.3.10);

(19) l_1 具提升性质 (定理 6.2.10);

(20) l_1 不是 Polish 空间 (定理 6.2.11);

(21) l_1 有子空间不具 AP, 不具基 (参考书(L-T-Ⅱ) P.103)。

下面我们给出上述性质的部分证明。

定理 6.2.1 l_1 不是 Asplund 空间。

证明 由于$l_1^* \cong l_\infty$，而l_∞不具RNP（容易直接证明，也可由RNP空间的子空间具RNP，而c_0不具RNP，故l_∞不具RNP）、由定义6.1.4注知，l_1不是Asplund空间。证毕。

定理 6.2.2 l_1具w BSP。

证明 事实上，若$(x_n)_{n=1}^\infty \subset l_1$，$x_n \xrightarrow{w} 0$，则$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$，从而由引理5.4.9知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow 0$。证毕。

注 由这个定理证明知，任何Schur空间具w BSP。□

引理 6.2.3 设E是l_1的子空间，则E是严格凸的当且仅当对任何两个线性无关元$x=\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$，$y=\sum_{n=1}^\infty y_n e_n \in E$，存在$n_0$，使

$$x_{n_0} y_{n_0} < 0.$$

证明 容易看到Banach空间E是严格凸的充要条件为对任何两个线性无关元$x, y \in E$，有$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$。

设

$$x=\sum_{n=1}^\infty x_n e_n,$$

$$y=\sum_{n=1}^\infty y_n e_n \in E,$$

且x，y线性无关，$\|x+y\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n+y_n|$，$\|x\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$，$\|y\| = \sum_{n=1}^\infty |y_n|$。我们有

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n+y_n| < \sum_{n=1}^\infty |x_n| + \sum_{n=1}^\infty |y_n|$$

当且仅当存在n_0，使$x_{n_0} y_{n_0} < 0$。事实上，若对$\forall n$，$x_n y_n > 0$，则

$$\Sigma |x_n+y_n| = \Sigma |x_n| + \Sigma |y_n|.$$

反之，若存在n_0，使$x_{n_0} y_{n_0} < 0$，则

$$|x_{n_0}+y_{n_0}| < |x_{n_0}| + |y_{n_0}|,$$

故

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n+y_n| < \sum_{n=1}^\infty |x_n| + \sum_{n=1}^\infty |y_n|.$$

证毕。

定理 6.2.4 存在 l_1 的 w^* 闭无限维严格凸子空间。

证明 将直线上的有理数全体排序为 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}2a^{-n}|r_n|\equiv A<+\infty.$$

将自然数集 N 分成可数个两两不相交的可数集 $(N_{jk})_{j=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty}$，令 $F:N\longrightarrow N$ 映射，使 F 限制在每个 N_{jk} 上是 N_{jk} 到 N 上的一个 1-1 映射。

令
$$u_{jk}=\sum_{m\in N_{jk}}2^{-F(m)}e_m,$$

$$v_{jk}=\sum_{m\in N_{jk}}2^{-F(m)}r_{F(m)}e_m \tag{6.10}$$

容易看到，对任何 $(\lambda_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$，使

$$\sum_{j,k}|\lambda_{jk}|<+\infty,$$

有

$$\|\sum_{j,k}\lambda_{jk}u_{jk}\|=\sum_{j,k}|\lambda_{jk}|,$$

$$\|\sum_{j,k}\lambda_{j,k}v_{jk}\|=A\sum_{j,k}|\lambda_{j,k}|, \tag{6.11}$$

令
$$g_j=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}u_{jk}+\frac{\theta}{j-1}\sum_{i=1}^{j-1}v_{j-i,i} \tag{6.12}$$

其中 $\theta=\dfrac{1}{3A}$，$j=1,2,\cdots$。

容易看到，

$$\operatorname{supp}(g_j)\cap\operatorname{supp}(g_n)=N_{j,n-j}(j<n), \tag{6.13}$$

其中 $\operatorname{supp}(g_j)=\left\{n;\ g_j=\sum_{n=1}^{\infty}g_{jn}e_n,\ g_{jn}\neq 0\right\}$。

易见，若 $(a_n)_{n=1}^{\infty}\in l_1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ng_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{-k}a_nu_{nk}+\frac{\theta}{n+k-1}a_{n+k}v_{nk}\right),$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_ng_n\right\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,\|g_n\|\leqslant(1+\theta A)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left| 2^{-k} a_n u_{nk} + \frac{\theta}{u+k-1} a_{n+k} v_{nk}\right|$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left| 2^{-1} a_n u_{n1} + \frac{\theta}{u} a_{n+1} v_{n1}\right|$$

$$\geqslant (2^{-1} - \theta A) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \qquad (由(6.11))$$

故$(g_n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{l_1}$，且易见 $g_n \xrightarrow{w^*} 0$。

令$E=[g_n]_{n=1}^{\infty}$，任取$x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$，$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n \in E$，$x, y$线性无关，则存在 $p, q, p<q$，使

$$a_p b_q - a_q b_p \neq 0, \tag{6.14}$$

考虑 x, y 关于自然基$(e_n)_{n=1}^{\infty}$表达式中属于 $N_{p,q-p}$ 的项，

$$a_p 2^{-(q-p)} u_{p,q-p} + a_q \frac{\theta}{q-1} v_{p,q-p},$$

$$b_p 2^{-(q-p)} u_{p,q-p} + b_q \frac{\theta}{q-1} v_{p,q-p}.$$

具体写出即为

$$\sum_{n\in N_{p,q-p}} \left(a_p 2^{-(q-p)} + a_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(n)}\right) 2^{-F(n)} e_n,$$

$$\sum_{n\in N_{p,q-p}} \left(b_p 2^{-(q-p)} + b_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(n)}\right) 2^{-F(n)} e_n.$$

由 (6.14) 式及 $(r_{F(n)};\ n\in N_{p,q-p})$ 在实数集中稠，必存在 $n_0 \in N_{p,q-p}$，使

$$\left(a_p 2^{-(q-p)} + a_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(n_0)}\right)\left(b_p 2^{-(q-p)} + b_q \frac{\theta}{q-1} r_{F(n_0)}\right) < 0,$$

由引理 6.2.3 知，E 是严格凸的。

下面证明 E 是 w^* 闭的，令 $G=\{\pm g_n\}_{n=1}^{\infty}$，$K=\overline{c_0}^*(G)$，由 Krein-Milman 定理，$\mathrm{ext} K \subset \overline{\{\pm g_n\}_{n=1}^{\infty}}^*$，但

$$g_n \xrightarrow{w^*} 0,$$

且$(U(E), w^*)$可度量化，故

$$\mathrm{ext}\, K \subset \{\pm g_n\}_{n=1}^{\infty} = G,$$

由于 l_1 具 RNP，故

$$K=\overline{c_0}(\mathrm{ext}\,K)=\overline{c_0}(G)=\overline{c_0}^*(G),$$

这表明$\overline{c_0}(G)$是 w^* 闭的。又由于$(g_n)_{n=1}^{\infty}\approx(e_n)_{l_1}$，故存在 $\delta>0$，使

$$\delta U(E)\equiv\{x\in E;\|x\|\leqslant\delta\}\subset\overline{c_0}(G).$$

(设存在 m,M，使

$$m\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_ng_n\right\|\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,$$

若

$$x=\Sigma a_ng_n\in E,\ \|x\|\leqslant m,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant m^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_ng_n\right\|=m^{-1}\|x\|\leqslant 1,$$

从而 $x\in\overline{c_0}(g_n)_{n=1}^{\infty}$)，从而 $\delta U(E)\subset\overline{co}(G)\subset U(E)$，因为$\overline{c_0}(G)$是 w^* 闭的，故立即看出 $U(E)$是 w^* 闭的，由 Krein-Smulian 定理(参考书(俞-1)p.75)知 E 是 w^* 闭的，证毕。

推论 6.2.5 c_0 有一个商空间是光滑的。

证明 如果 $E\subset X^*$，且 E 是 w^* 闭的，则

$$(X/{}^{\perp}E)^*=({}^{\perp}E)^{\perp}=\overline{E}^*=E,$$

如果 E 是严格凸的，则容易看到 $X/{}^{\perp}E$ 是光滑的，应用定理 6.2.4 即可得 c_0 有一个商空间是光滑的。

推论 6.2.6 LP 空间的商空间不必是 LP 空间。

证明 取 $X=c_0$，取 $c_0/\perp E$ 即可，其中 E 为定理 6.2.4 中 l_1 的 w^* 闭无限维严格凸子空间，证毕。

定理 6.2.7 设 E 是 l_1 的子空间，则

E 是严格凸的$\Longleftrightarrow E$ 是 MLUR。

证明 只须证必要性。实际上可证明若 $x_0\in\mathrm{ext}\,U(E)$ 则 $x_0\in$ MLUR-$U(E)$ ($U(E)$的中点局部一致凸点)。

设 $x_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in E$，$x_0\in\mathrm{ext}\,U(E)$。反证，假设 x_0 不是 $U(E)$ 的中点局部一致凸点，则存在

$$u_n=\sum_{i=1}^{\infty}p_i^{(n)}e_i,$$

$$v_n=\sum_{i=1}^{\infty}q_i^{(n)}e_i,$$

使
$$\lim_n\|u_n\|=\lim_n\|v_n\|=1,$$

$$x_0=\frac{u_n+v_n}{2},$$

且
$$\inf_n\|u_n-v_n\|>0$$

(注 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}\subset E$).

由于 $x_0\in\operatorname{ext}U(E)$, 故 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$不含范数收敛子列.

容易从具基空间中紧性判别法(实际即"去尾法")知, 存在自然数的子列 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$和 $\delta>0$,使得对任何 k,有

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}|p_i^{(n_k)}|>\delta,\quad \sum_{i=k+1}^{\infty}|q_i^{(n_k)}|>\delta.$$

选 k_0,使得当 $k>k_0$ 时,有

$$\|u_{n_k}\|\leqslant 1+\frac{\delta}{2},\quad \|v_{n_k}\|\leqslant 1+\frac{\delta}{2}.$$

故当 $k>k_0$ 时

$$\sum_{i=1}^{k}|p_i^{n_k}|\leqslant 1-\frac{\delta}{2},\quad \sum_{i=1}^{k}|q_i^{n_k}|<1-\frac{\delta}{2},\tag{6.15}$$

另一方面,对任 k,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}|p_i^{n_k}+q_i^{n_k}|=\sum_{i=1}^{k}|a_i|$$

故由于$\|x_0\|=1$知, $\lim_k\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}|p_i^{n_k}+q_i^{n_k}|=1$,这与(6.14)式矛盾! 证毕.

定理 6.2.8 l_1 没有无限维 LUR 空间.

证明 设 E 是 l_1 的无限维子空间, 则 E 含有一个"几乎不相交"的正规化序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$\lim_n \|x_1 \pm x_n\| = \lim_n (\|x_1\| + \|x_n\|) = 2.$$

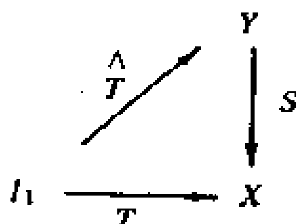
这与 LUR 定义矛盾！故 E 不是 LUR。证毕。

注　以上结果取自(K-F-2)。□

下面我们证明 l_1 的一个重要性质，l_1 具有"共轭的延拓性质质"即提升性质。

定理 6.2.9　令 X,Y 是 Banach 空间，且存在 $S\in L(Y,X)$，使 $SY=X$(即满映象)，则对任何 $T\in L(l_1,X)$，存在 $\hat{T}\in L(l_1,Y)$，使 $S\hat{T}=T$，更一般地如果 S 是商映象(即 $\overline{TU(Y)}=U(X)$)，则对每个 $\varepsilon>0$，可选 $\hat{T}\in L(l_1,Y)$，使

$$\|\hat{T}\|\leqslant(1+\varepsilon)\|T\|.$$



证明　设 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 l_1 的自然基，令 $Te_n=x_n$，$\forall n$。则 $T\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$，$\forall\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in l_1$。且

$$\sup_n\|x_n\|\leqslant\|T\|.$$

由于 S 是 Y 到 X 上的映象(或 S 是商映象)，根据开映象定理，存在 Y 中有界点列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$，使 $Sy_n=x_n$，$\forall n$。

令 $\hat{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n$，$\forall\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in l_1$，则

$$S\hat{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\right)=S\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n=T\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\right),$$

$\forall\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in l_1$，若 $S\hat{T}=T$。

若 S 是商映象，则对每个 $\varepsilon>0$，可选 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$，使得 $Sy_n=x_n$，且

$$\|y_n\|\leqslant\|x_n\|(1+\varepsilon),\ \forall n.$$

故对任 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in l_1$，

$$\left\|\hat{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\right)\right\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n\right\|\leqslant((1+\varepsilon)\sup_n\|x_n\|)\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

故 $\|\hat{T}\|\leqslant(1+\varepsilon)\|T\|$。证毕。

定义 6.2.1　Banach 空间 Z 称为具有提升性质，如果对任

何 Banach 空间 X, Y，任 $S\in L(Y, X)$，使 $SY=X$，及任 $T\in L(Z, X)$，存在 $\hat{T}\in L(Z, Y)$，使得 $T=S\hat{T}$。

注　定理 6.2.9 表明 l_1 具提升性质，提升性质有点象延拓性质的"共轭"。□

定理 6.2.10　若 X 是可分 Banach 空间，且具提升性质，则 $X\approx l_1$。

证明　因为每个可分 Banach 空间是 l_1 的一个商空间，设 $Q_X: l_1\longrightarrow X$ 为商映象。令 $I_X: X\longrightarrow X$ 是恒等映象，由于 X 具延拓性质，故存在 $\hat{I}_X: X\longrightarrow l_1$，使 $Q_X\hat{I}_X=I_X$，则 $\hat{I}_X$ 是 X 到 l_1 内的线性同胚(对任 $x\in X$, $\|x\|=\|I_Xx\|=\|Q_X\hat{I}_Xx\|\leqslant\|\hat{I}_Xx\|\leqslant\|\hat{I}_X\|\|x\|$)。

$$\begin{array}{ccc} & & l_1 \\ & \hat{I}_X\nearrow & \downarrow Q_X \\ X & \xrightarrow{I_X} & X \end{array}$$

$\hat{I}_XQ_X: l_1\longrightarrow\hat{I}_XX$ 是 l_1 上的一个投影 ($\hat{I}_XQ_X\hat{I}_XQ_X=\hat{I}_XQ_X$)，由于 l_1 是 prime空间，故 $\hat{I}_XX\approx l_1$，从而 $X\approx l_1$。证毕。

注　由定理 6.2.9 的证明可知，对任何 Γ, $l_1(\Gamma)$ 也具提升性质。Kothe(Kö-1) 也证明若 Banach 空间 X 具有提升性质，则 $X\approx l_1(\Gamma)$，对某个 Γ。□

定理 6.2.11　l_1 不是 Polish 空间。

证明　由于 Polish 空间 X 的共轭空间 X^* 是可分的。证毕。

下面，我们对含 l_1 的空间的性质进行讨论。

目前关于 $l_1\not\hookrightarrow X$ (或 $l_1\hookrightarrow X$) 的空间的研究已经得到极为丰富的结果。其中，最重要的结果是 Rosenthal(Dor)定理。

定理(Rosenthal-Dor)

(1) 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是 Banach 空间的有界序列，则

或者：$(x_n)_{n=1}^{\infty}$有子列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}\approx(e_n)_{l_1}$；

或者：$(x_n)_{n=1}^{\infty}$有子列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$是 w Cauchy 的。

(2) 若 X 是 Banach 空间，则

$l_1\not\hookrightarrow X\Longleftrightarrow X$ 的每个有界序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子序列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 使

$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$是 w Canchy 的。

注 1 对实 Banach 空间，定理是由 Rosenthal 得到的。尔后，Dor 将 Rosenthal 定理推广到复 Banach 空间。□

注 2 Banach 空间 X 的子集 A 称为 w 条件紧的(w CC)，如果 A 的任何子序列有 w Cauchy 子序列。因此，定理中(2)即说 $l_1 \not\hookrightarrow X \Longleftrightarrow U(X)$ 是 w CC。□

值得注意的是对可分 Banach 空间(此时$(U(X^*), w^*)$)是紧可度量化空间)和一般(未必可分)Banach 空间，含 l_1 的特征略不同。下面列出的特征，分为两种情况，注意可分情况的特征在不可分时不成立。

我们仍采取先列出这些特征及性质。由于篇幅有限，只证明其中的一部分。

I 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) $l_1 \not\hookrightarrow X$；

(2) X 的单位球是 w CC（即X的每个有界序列有 w Cauchy 子序列）(定理 6.2.17)；

(3) $L_1 \not\hookrightarrow X^*$ （定理 6.2.20)；

(4) L_1 不 G_δ 嵌入 X^* （定义 6.2.7) (B-R-1) (注 (B-R-1) 证明 $L_1 G_\delta$ 嵌入 $X^* \Longleftrightarrow L_1 \hookrightarrow X^*$)；

(5) $C[0,1] \not\hookrightarrow X^*$ （定理 6.2.21)；

(6) $L(L_1, X^*) = DP(L_1, X^*)$ （定理 6.2.20)；

(7) X^* 不含有界 δ-Rademacher 树 （定义 6.2.4) (定理 6.2.23)；

(8) X^* 中每个 w^* 紧凸集 K，有 $K = \overline{c_0}(\text{ext}\, K)$ （证明见 Du-1)；

(9) 每个 $T \in L(X, L_\infty)$，T 映有界列为具 a.e 收敛子列的序列 （定理 6.2.24)；

(10) X^* 值的每个一致有界 Martingale(f_n, Σ_n)是 Pettis-Cauchy 的 （定理 6.2.22)；

(11) 对每个 X^* 值 $L_1(X^*)$ 有界、一致可积的 Martingale(f_n,Σ_n)，存在 $f:[0,1]\longrightarrow X$，使得每个 $x^{**}\in X^{**}$，有

$$x^{**}f_n(t)\xrightarrow{a.e}x^{**}f(t).$$

(定理 6.2.25)；

(12) X^* 具 wRNP （定义 6.2.2）（证明见 Du-1）；

(13) 对每个 $x^{**}\in X^{**}$ 和 X^* 的每个 w^* 紧集 M，$x^{**}|_{(M,w^*)}$ 有一个连续点。(S-S-1)；

(14) X^* 的每个有界集 A 是在 (X^*,w) 中 w^*dentable。（定义 6.2.3）(S-S-1)；

(15) X^* 的每个有界集 A 是 w^* 纯量 dentable （定义 6.2.4）(S-S-1)；

(16) 恒等映象 $I:(U(X^*),w^*)\longrightarrow(U(X^*),\|\cdot\|)$ 是 universal 纯量可测 （即对 $(U(X^*),w^*)$ 上每个有限正则 Borel 测度 μ，每个 $x^{**}\in X^{**}$ 是 μ 可测的）（证明见 Du-1）；

(17) X^* 是强正则的 （定义 6.2.5）（证明见 Du-1）。

(18) $C_{wb}(X,Y)=C_{wsc}(X,Y)$，$\forall$Banach 空间 Y (A-D-R-1)。（注：$C_{wb}=\{f:X\longrightarrow Y;\ f|_B$ 是 $w-\|\cdot\|$ 连续的，$\forall$有界集 $B\subset X\}$，$C_{wsc}(X,Y)=\{f:X\longrightarrow Y;f$ 是 $w-\|\cdot\|$ 序列连续的$\}$）

(19) 存在 $Y\subset X$，及 Y 上一个等价范数 $|||\cdot|||$，使 $(Y,|||\cdot|||)$ 一致 G 可微性刻划紧性（定义 6.1.6）(B-L-1)；

(20) $DP(X,Y)=K(X,Y)$，$\forall$Banach 空间 Y (Ro-2)；

(21) $L(Y,X^*)=DP(Y,X^*)$，$\forall$DP 空间 Y (Em-1)；

(22) 对任何 $K\subset X^*$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x^*\in K}|\langle x_n,x^*\rangle|=0$，其中

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X,x_n\xrightarrow{w}0,$$

则 K 是相对紧的 (Em-1)。

定义 6.2.2 设 (Ω,Σ,μ) 是有限完备测度空间，Banach 空间 X 称为关于 (Ω,Σ,μ) 具 wRNP，如果对每个 μ 连续，有

界变差向量测度 $D: \Sigma \longrightarrow X$，存在一个 w 可测函数 $f: \Omega \longrightarrow X$，使

$$x^*F(E) = \int_E x^*f(\omega)d\mu, \forall E \in \Sigma.$$

Banach 空间 X 称为具 wRNP，如果 X 关于任何有限完备测度空间具 wRNP。

注 1　一个 w 可测函数 $f: \Omega \longrightarrow X$，称为 Pettis 可积的，如果对每个 $x^* \in X^*$，$x^*f \in L_1(\mu)$，且对每个 $E \in \Sigma$，存在 $x_E \in X$，使

$$x^*(x_E) = \int_E x^*f d\mu, \forall x^* \in X^*.$$

此时记 $x_E = (P)\int_E f d\mu$。这样定义中的 f 就称为 F（关于 μ）的 Pettis "导数"。□

注 2　可以证明 X 可分，则 wRNP$\Longleftrightarrow$RNP。也可以证明 X 具 wRNP$\Longleftrightarrow X$ 关于$([0,1], \mathscr{L}, m)$具 wRNP。(Ta-1)。□

定义 6.2.3　X^* 的有界子集 A 叫做在 (X^*, w)中 w^*dentable，如果对 X^* 中 0 点每个 w 邻域 V，存在 A 的 w^* 开 Slice（切片）$S = S(A, x, \alpha)$，使 $S - S \subset V$，其中

$$S(A, x, \alpha) = \{x^* \in A; x^*(x) > \sup\{y^*(x); y^* \in A\} - \alpha\}.$$

定义 6.2.4　X^* 的有界子集 A 称为 w^* 纯量 dentable，如果对每个 $\varepsilon > 0$，每个 $x^{**} \in X^{**}$，存在 A 的 w^* 开 Slice $S = S(A, x, \alpha)$，使得 $O(x^{**}, S) < \varepsilon$，其中

$$O(x^{**}, S) = \sup\{x^{**}(x^*) - x^{**}(y^*); x^*, y^* \in S\}.$$

定义 6.2.5　Banach 空间 X 叫强正则的，如果对 X 的每个有界闭凸集 A 和每个 $\varepsilon > 0$，$\exists n$ 及 A 的 slice$S_1, \cdots, S_n$，使

$$\operatorname{diam} \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) < \varepsilon.$$

定义 6.2.6　Banach 空间 Y 称为在 Y 中一致可微性刻划紧性，如果 Y 中集 K 是相对紧的当且仅当存在 $x \in Y$，使得

$$\lim_{t\to 0}\sup_{y\in K}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}\text{ 存在。}$$

定义 6.2.7 1-1 有界线性算子 $T:X\longrightarrow Y$ 称为 G_δ 嵌入，如果对 X 的每个范闭有界集 A，TA 是 Y 中范数 G_δ 集，此时称 XG_δ 嵌入 Y。

I 若 X 是可分 Banach 空间，则 TFAE：

$S(1)$ $l_1 \not\hookrightarrow X$；

$S(2)$ $\overline{X}^{sw^*}=X^{**}$（定理 6.2.25）；

$S(3)$ $\overline{U(X)}^{sw^*}=U(X^{**})$（定理 6.2.25）；

$S(4)$ $\text{Card}\, X=\text{Card}\, X^{**}$（定理 6.2.25）；

$S(5)$ 对 X 的任何有界子集 A，$\overline{A}^{sw}=\overline{A}^{w}$。（定理 6.2.25）；

$S(6)$ 对 X^{**} 的任何有界子集 A，$\overline{A}^{sw^*}=\overline{A}^{w}$。（定理6.2.25）；

$S(7)$ X^* 具(ω)性质（即 X^{**} 的每个有界序列有 w^* 收敛子序列）（定理 6.2.25）；

$S(8)$ $l_1(\Gamma)\not\hookrightarrow X^*$，$\forall$不可数 Γ（定理 6.2.25）；

$S(9)$ $l_1[0,1]\not\hookrightarrow X^*$（定理 6.2.25）；

$S(10)$ $\forall x^{**}\in X^{**}\backslash\{0\}$，存在 $x_0\in X$，使

$$\|x^{**}+x_0\|\neq\|x^{**}-x_0\|。$$

(Ro-2)；

$S(11)$ $C[0,1]\not\approx X/M$，$\forall M\subset X$（定理 6.2.26）；

$S(12)$ $r_{ca}(\mathscr{B}[0,1])\not\hookrightarrow X^*$(Pe-1)（注 $r_{ca}(\mathscr{B}[0,1])$ 表示[0，1]的 Borel 子集的 σ 代数上的一切有界变差可数可加测度）；

$S(14)$ 每个 $x^{**}\in X^{**}$，每个 w^* 紧集 $A\subset X^{**}$，$x^{**}|_A$ 有一个 w^* 连续点（定理 6.2.5）。

观察上述特征，我们发现可以将它们分成四个类型：

(1) Banach 空间的拓扑性质及几何性质；

(2) Pettis 积分；

(3) 嵌入特征；

(4) 算子空间性质。

显然：X^* 具 RNP $\Longrightarrow l_1 \subset\!\!\!\to X$，为了更好比较，我们列出下表。

X 是 Asplund 空间 等价于下列条件	$l_1 \not\subset\!\!\!\to X$ 等价于下列条件
(1) X^* 具 RNP	(1)′ X^* 具 wRNP
(2) X^* 具 KMP	(2) 对 X^*的每个 w^* 紧凸集K， $K=\overline{co}(\text{ext}K)$。
(3) X^*不含有界 δ 树	(3)′ X^* 不含有界 δ-Rademacher 树。
(4)	(4)′ $L_1[0,1] \not\subset\!\!\!\to X^*$
(5) $L(L_1,X^*)=R(L_1,X^*)$，	(5)′ $L(L_1,X^*)=DP(L_1,X^*)$
(6) 每个 $T\in L(X,L_\infty)$ 是 a.e 紧(见下面注)。	(6)′ 每个 $T\in L(X,\ L_\infty)$映有界列到具 a.e 收敛子列的序列。
(7) 每个 $L_\infty(X^*)$有界 Martingale$(f_n,\ \Sigma_n)$是 Bochner-Cauchy 的。	(7)′ 每个 $L_\infty(X^*)$ 有界 Martingale(f_n,Σ_n)是Pettis-Cauchy 的。
(8) 每个 $L_1(X^*)$有界、一致可积的 Martingale(f_n,Σ_n)，存在 $f:[0,1]\longrightarrow X^*$，和 $E\in[0,1]$，使 $\mu([0,1]\backslash E)=0$，且 $f_n(t)\xrightarrow{w} f(t)$，$\forall t\in E$。	(8)′ 每个 $L_1(X^*)$有界、一致可积的 Martingale (f_n,Σ_n)，存在 $f:[0,1]\longrightarrow X^*$，使对每个 $x^{**}\in X^{**}$， $x^{**}f_n(t)\xrightarrow{a.e} x^{**}f(t)$。
	(9) X 的每个有界序列有 w Cauchy 子列。
(10) X^* 的每个有界集是 w^* dentable。	(10)′ X^* 的每个有界子集 A 是在(X^*,w)中 w^*dentable。

(11) (11)′ X^*的每个有界子集 A 是 w^* 纯量 dentable。

(12) (12)′ 对每个 $x^{**}\in X^{**}$ 及 X^* 的每个 w^* 紧凸集 C，$\{x^*;\ x^{**}|_{(C,w^*)}$ 在 x^* 点连续$\}\cap \mathrm{ext}C$ 是 $\mathrm{ext}C$ 的w^*稠 G_δ集。

(13) (13)′ 每个 $x^{**}\in X^{**}$ 和 X^* 的每个 w^* 紧集 A，$x^{**}|_A$ 有一个 w^* 连续点。

注：$T\in L(X,L_\infty)$ 称为 a.e 紧，如果对每个 $\varepsilon>0\ (0<\varepsilon<1)$，存在 $E\subset[0,1]$，使 $m([0,1]\backslash E)<\varepsilon$ 且 $x\longmapsto \chi_E\cdot Tx$ 是 X 到 L_∞ 内的紧算子。□

我们再列出有关含 l_1 的性质。

(P1) $l_1 \not\hookrightarrow X^* \Longrightarrow X$ 不具 (ω) 性质$\Longrightarrow l_1\not\hookrightarrow X$。(定理 6.2.27)

(P2) 设 X 是实 Banach 空间，$l_1\hookrightarrow X^*$ 且任何 w^* 收敛于 0 的序列(x_n^*)有$(x_n^*)\not\sim(e_n)_{l_1}$，则 $l_1\hookrightarrow X$。(定理 6.2.28)。

(P3) 若 X 是可分 Banach 空间，则

$$l_1\not\hookrightarrow X^* \Longleftrightarrow c_0\not\approx X/M,\ \forall M\subset X$$

(定理 6.2.35)。

(P4) 若 X 是实 Banach 空间，则

$$l_1\hookrightarrow X^* \Longrightarrow \text{或者 } l_1\hookrightarrow X;$$
$$\text{或者 } c_0\approx X/M,\text{对某个 } M\subset X$$

(定理 6.2.36)。

(P5) 若 X 是无限维 Schur 空间，则 X 继承含 l_1 (定理 6.2.37)。

(P6) 若 X 是 Polish (Banach) 空间，则 $l_1\not\hookrightarrow X$ (定理 6.2.38)。

(P7) $l_1\not\hookrightarrow X^*\Longrightarrow X^*$有唯一线性等距前共轭 (Go-1)。

(P8) $l_1 \not\hookrightarrow Y, l_1 \not\hookrightarrow X/Y \Longrightarrow l_1 \not\hookrightarrow X$ (Di-1)。

下面开始逐一讨论。

先证明著名的 Rosenthal-Dor 定理。这个定理的证明有利用组合论 Ramsey 定理的，也有研究 Baire 第1类函数的方法，我们给出前一种方法。为此，先引入若干定义及引理。

设 N 是正整数集。

(1) 若 M 是 N 的无限子集，记 $[M]=\{S; S\subset M, \text{Card } S=+\infty\}$，(注若 $(m_i)_{i=1}^{\infty}\in[M]$，我们总假设 $m_1<m_2<\cdots$，下面类同)，

(2) $[M]^{<\omega}=\{S; S\subset M, \text{Card}S<+\infty\}$；

(3) $[M]_k=\{(m_1,m_2,\cdots,m_k); m_i\in M, 1\leqslant i\leqslant k$，且

$$m_1<m_2<\cdots<m_k\};$$

(4) 对 $A\in[M]^{<\omega}, M\in[N]$，记

${}_A[M]=\{L\in[N]$；A 是 L 的前段，且 $L\backslash A\in[M]\}$。(即若 $A=(n_1,\cdots,n_l)$，则 ${}_A[M]$ 中元为 $(n_1,\cdots,n_l,m_1,m_2,\cdots)$，其中 $(m_1,m_2,\cdots)\in[M]$)。

若 $n_1\in N, M\in[N]$，且 $m>n_1, \forall m\in M$，也记

$${}_{\{n_1\}}[M]=(n_1,M);$$

(5) 将 $[N]$ 看作 $2^N=\{0,1\}^N$ 的子集，2^N 中乘积拓扑限制在 $[N]$ 上记为 τ。

注1 若 $(M_n)_{n=1}^{\infty}\subset[N], M\in[N]$，则

$M_n\xrightarrow{\tau}N$ 当且仅当对任何正整数 k，存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，M_n 的长为 k 的初始线段与 M 的长为 k 的初始线段一致。□

注2 形如 ${}_A[N]$，其中 $A\in[N]^{<\omega}$ 的集是 τ 的一个基。□

(6) 在 $[N]$ 上引入 w^* 拓扑。一切形如 ${}_A[M]$，其中 $A\in[N]^{<\omega}$，$M\in[N]$，的集生成的拓扑叫 $[N]$ 上 w^* 拓扑。

注 显然，$\tau<w^*$ 拓扑。□

定义 6.2.8 一个集 $\mathscr{A}\subset[N]$ 称为 Ramsey 集，如果对一切 $M\in[N]$，存在 $L\in[M]$，使得

$[L]\subseteq\mathscr{A}$;

或者 $[L]\subseteq[N]\setminus\mathscr{A}$。

定义 6.2.9 设 $A\in[N]^{<\omega}$，$\mathscr{A}\subset[N]$ 且 $M\in[N]$。我们说 M 关于$\mathscr{A}$接受 A，如果 ${}_A[M]\subset\mathscr{A}$。

M 关于$\mathscr{A}$反射 A，如果对一切 $L\in[M]$，L 关于$\mathscr{A}$不接收A。

注 若 M 关于$\mathscr{A}$接受中，则$[M]\subset\mathscr{A}$。□

古典的 Ramsey 定理为

定理 6.2.12(Romsey) 若$\mathscr{A}\subset[N]_2$，则存在 $M\in[N]$，使得或者$[M)_2\subset\mathscr{A}$，或者$[M]_2\subset[N]_2\setminus\mathscr{A}$。

证明 令 $m_1\in N$ 是任意元，选 $M_1\in[N]$，使得 $m_1<m$，$\forall m\in M_1$，且

(a) 或者$\{(m_1,m);m\in M_1\}\subset\mathscr{A}$

(b) 或者$\{m_1,m);m\in M_1\}\subset[N]_2\setminus\mathscr{A}$。

(考虑$\{(m_1,n);n>m_1\}$，令

$$A=\{(m_1,n);n>m_1,(m_1,n)\in\mathscr{A}\},$$

$$B=\{(m_1,n);n>m_1,(m_1,n)\notin\mathscr{A}\},$$

则 A、B 之中必有一个为无限集，例如 A，令 $M_1=A$ 即可)。

称(m_1,M_1)为“好”的，如果$\{(m_1,m);m\in M_1\}\subset\mathscr{A}$。

称(m_1,M_1)为“坏”的，如果$\{(m_1,m);m\in M_1\}\subset[N]_2\setminus\mathscr{A}$。

取 $m_2\in M_1,m_2>m_1$，再选 $M_2\in[M_1]$，使得或者(m_2,M_2)是“好”的，或者(m_2,M_2)是“坏”的。以这种方式继续下去，得到$\{(m_i,M_i)\}_{i=1}^{\infty}$。

令 $I_1=\{i;(m_i,M_i)$是“好”的$\}$，$I_2=\{i;(m_i,M_i)$是坏的$\}$

I_1、I_2 中至少有一个无限集。

令 $I=\begin{cases}I_1, & \text{如果 } I_1 \text{ 是无限集;}\\ I_2, & \text{如果 } I_2 \text{ 是无限集.}\end{cases}$

$M=\{m_i;i\in I\}$，则 $M\in[N]$。

若 $I=I_1$，则因$(m_i,M_i)_{i\in I}$是“好”的，且由 $M_{i+1}\in[M_i]$知，$[M]_2\subset\mathscr{A}$。

若 $I=I_2$，则因 $(m_i, M_i)_{i\in I}$ 是"坏"的，且由 $M_{i+1}\in[M_i]$ 知，$[M]_2\subset[N]_2\backslash\mathscr{A}$。证毕。

注 组合论中的 Ramsey 型定理在 Banach 空间理论中有广泛应用。例如 Brunel & Sucheston (B-S-1) 利用 Ramsey 定理证明对任何 Banach 空间 X 的每个有界序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，有子列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使得对每个 $(a_i)_{i=1}^{k}$，每个 $\varepsilon>0$，存在 a，及 l_0，使得当 $l>l_0$ 时，有

$$\left|\|a_1x_{n_l}+a_2x_{n_{l+1}}+\cdots+a_kx_{n_{l+k}}\|-a\right|<\varepsilon.$$

(这样子列 (x_{n_i}) 称为 spreading 模)

Odell (Od-1) 利用推广的 Ramsey 定理证明每个 Banach 空间或者含 c_0，或者含 l_1，或者含非 DPP 空间。□

引理 6.2.13 任取 $\mathscr{A}\subset[N]$，则对任何 $M\in[N]$，存在 $L\in[M]$，使得

(a) 或者 L 关于 $\mathscr{A}$ 接受 L 的一切有限子集；

(b) 或者 L 关于 $\mathscr{A}$ 反射 L 的一切有限子集。

证明 若存在 $L\in[M]$，使 L 关于 $\mathscr{A}$ 接受空集 ϕ，则 $[L]\subset\mathscr{A}$，从而 L 关于 $\mathscr{A}$ 接受 L 的一切有限子集。因此，不妨假设对任何 $L\in[M]$，L 关于 $\mathscr{A}$ 不接受空集 ϕ。即对任何 $L\in[M]$，存在 $L_1\in[L]$，使 $L_1\notin\mathscr{A}$。

我们要求存在 $m_1\in M$ 及 $M_1\in[M]$，使得

M_1 关于 $\mathscr{A}$ 反射 $\{m_1\}$。 (6.17)

反证：若 $\forall n_1\in M, N_1\in[M]$，有 N_1 关于 $\mathscr{A}$ 不反射 $\{n_1\}$，则存在 $N_2\in[N_1]$，使 N_2 关于 $\mathscr{A}$ 接受 $\{n_1\}$。

令 $n_2\in N_2, n_2>n_1$。考虑 n_2，N_2，同样存在 $N_3\in[N_2]$，使 N_3 关于 $\mathscr{A}$ 接受 $\{n_2\}$。当然，N_3 关于 $\mathscr{A}$ 接受 $\{n_1\}$，继续下去，得 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}\in[M]$，$N_i\in[N]$，使得

$N_{i+1}\in[N_i]$；$n_i\in N_i$；N_{i+1} 关于 $\mathscr{A}$ 接受 $(n_1,\cdots,n_i)$。

任取 $(n_{i_k})_{k=1}^{\infty}$，则 $n_{i_1}\in N_{i_1}$，$(n_{i_k})_{k=2}^{\infty}\in N_{i_2}$，因为 N_{i_2} 关于 $\mathscr{A}$ 接受 n_{i_1}，从而 $(n_{i_k})_{k=1}^{\infty}\in\mathscr{A}$。由此得

$$[(n_i)_{i=1}^{\infty}]\subset\mathscr{A}.$$

但是$[(n_i)_{i=1}^{\infty}\in[M]$，从而$(n_i)_{i=1}^{\infty}$关于$\mathscr{A}$接受空集中，这与假设矛盾！故(6.17)成立。

由(6.17)作归纳论证。假设找到$(m_i)_{i=1}^{k}$，$M_k\in[M]$，使得对一切$F\subseteq(m_i)_{i=1}^{k}$，$M_k$关于$\mathscr{A}$反射$F$，则存在$m_{k+1}\in[M_k]$，使

$$m_{k+1}>m_k,$$

且存在$M_{k+1}\in[M]$，使得

M_{k+1}关于$\mathscr{A}$反射$(m_i)_{i=1}^{k+1}$的一切有限子集。(6.18)

事实上，否则如(6.17)证明，存在$(l_i)_{i=k+1}^{\infty}\in[M_k]$，使得对每个$n>k+1$，$(l_i)_{i=n}^{\infty}$关于$\mathscr{A}$接受$F_n\cup\{l_{n-1}\}$，对某个固定$F_n\subset(m_i)_{i=1}^{k}$。

转到子列，对某个固定F，有$F_n=F$，$\forall n>k+1$。这样，$(l_i)_{i=k+1}^{\infty}$关于$\mathscr{A}$接受F（我们这里仍将$(l_i)_{i=k+1}^{\infty}$的子列记为$(l_i)_{i=k+1}^{\infty}$）。这与M_k关于$\mathscr{A}$反射F。矛盾！故(6.18)成立。

由(6.17)和(6.18)知，存在$(m_i)_{i=1}^{\infty}$，对任何k，有$M_k\in[M]$，使得对一切$F\subset(m_i)_{i=1}^{k}$，M_k关于$\mathscr{A}$反射F。

令$M=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$，则$(m_i)_{i=1}^{\infty}$关于$\mathscr{A}$反射$(m_i)_{i=1}^{\infty}$的一切有限子集。事实上，任取$(m_{i_1},\cdots,m_{i_k})$，则Mm_{i_k}关于$\mathscr{A}$反射$(m_{i_1},\cdots,m_{i_k})$，因此，$(m_{i_{k+1}},\cdots)$关于$\mathscr{A}$反射$(m_{i_1},\cdots,m_{i_k})$；从而$(m_i)_{i=1}^{\infty}$关于$\mathscr{A}$反射$(m_{i_1},\cdots,m_{i_k})$。证毕。

定理 6.2.14 若$\mathscr{A}\subset[N]$，$\mathscr{A}$是w^*开集，则$\mathscr{A}$是Ramsey集。

证明 令$M\in[N]$，由引理 6.2.13，存在$L\in[M]$，使

(a) 或者L关于$\mathscr{A}$接受L的一切有限子集。

(b) 或者L关于$\mathscr{A}$反射L的一切有限子集。

若L关于$\mathscr{A}$接受L的任何有限子集，则对L的任何有限子集A，$_A[L]\subset\mathscr{A}$，从而$[L]\subset\mathscr{A}$。

若L关于$\mathscr{A}$反射L的任何有限子集，则利用$\mathscr{A}$是w^*开集知，$[L]\subset[N]\setminus\mathscr{A}$。事实上，否则存在$P\in[K]\cap\mathscr{A}$。由于$\mathscr{A}$是$w^*$开集并且$P\in\mathscr{A}$。因此，存在$A\in[P]^{<\omega}$及$M_0\in[N]$，使

$$P\in{}_A[M_0]\subseteq\mathscr{A}.$$

从而，有 $_A[P]\subset\mathscr{A}$ 故 P 关于$\mathscr{A}$接受 A，又因 $P\in[L]$，A 也是 L 的有限子集，这与 L 关于$\mathscr{A}$反射L的一切有限子集（即任$P\in[L]$，P 关于$\mathscr{A}$不接受 A）矛盾！证毕。

推论 6.2.15 若$\mathscr{A}\subset[N]$，$\mathscr{A}$是 w^* 闭集，则$\mathscr{A}$是 Ramsey 集。

证明 由 Ramsey 集定义知，$\mathscr{A}$是 Ramsey 集，当且仅当 $[N]\backslash\mathscr{A}$是 Ramsey 集。结合定理 6.2.14 即得证明。证毕。

注 1 一个集$\mathscr{A}\subset[N]$称为完全 Ramsey 集，如果对一切 $A\in N]^{<\omega}$，一切 $M\in[N]$，存在 $L\in[M]$，使得

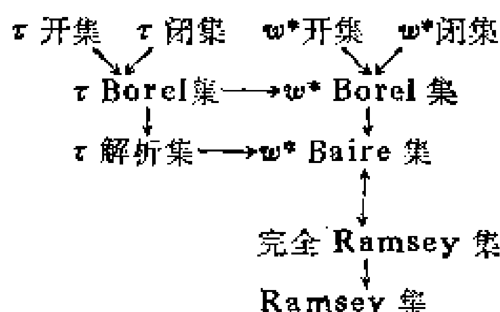
(a) 或者 $_A[L]\subset\mathscr{A}$；

(b) 或者 $_A[L]\subset[N]\backslash\mathscr{A}$。

一个集$\mathscr{A}\subset[N]$称为具 w^*Baire 集，如果 $\mathscr{A}$ 是某个 w^* 开集与某个 w^*的第一纲集的对称差。

Polish 空间 Ω 中的解析集 A 定义为：存在某个 Polish 空间 Z 及连续映象 $f:Z\longrightarrow A$，使 $f(Z)=A$。即 A 是某个 Polish 空间的连续象。由于$([N],\tau)$是 Polish 空间，因此可定义$[N]$中 τ 解析集。

可以证明下列关系成立（Od-1）：



□

注 2 容易看到并不是每个集$\mathscr{A}\subset[N]$是 Ramsey 集。例如令$(M_\alpha)_{\alpha<C}$ 是$[N]$的一个良序（其中 C 为连续统）。对每个$\alpha<C$，归纳选取 M_α^1, M_α^2，使得 M_α^1，M_α^2 是$[M\ ]$的不同元，且它们与一切 $\beta<\alpha$的M_β^1, M_β^2不同，令$\mathscr{A}=\{M_\alpha^1\}_{\alpha<B}$，显然，$\mathscr{A}$不是 Ramsey

集（因为任何 $M\in[N]$，$M=M_{\alpha_0}$，对某个 $\alpha_0<C$，则任何 $L\in[M]$，$[L]$中必有 $\{M_\alpha^1\}_{\alpha<C}$ 的元也有 $\{M_\alpha^2\}_{\alpha<C}$ 的元）。□

下面开始进入 Rosenthal-Dor 定理的证明正题。

引理 6.2.16 令 $(A_j,B_j)_{j=1}^{\infty}$ 是某个集 S 的一对子集序列，使 $A_j\cap B_j=\Phi$，$\forall j$。假设不存在子序列 $(A_{j_k},B_{j_k})_{k=1}^{\infty}$，使得对每个 $s\in S$，

$$\text{或者}\lim_{k\to\infty}\chi_{A_{j_k}}(s)=0;\text{或者}\lim_{k\to\infty}\chi_{B_{j_k}}(s)=0,$$

则存在一个无限子序列 $(A_j,B_j)_{j\in J}$，使得对 J 的任何一对不相交的有限子集 (σ,δ)，有

$$(\bigcap_{j\in\delta}A_j)\cap(\bigcap_{j\in\sigma}B_j)\neq\Phi.$$

注　若 $(A_j,B_j)_{j\in J}$ 是 S 的一对子集的序列，使得 $A_j\cap B_j=\Phi$，$\forall j$，且对 J 的任何一对不相交的有限子集 (σ,δ) 有，

$$(\bigcap_{j\in\delta}A_j)\cap(\bigcap_{j\in\sigma}B_j)\neq\Phi,$$

则 $(A_j,B_j)_{j\in J}$ 叫 Bool 独立的。□

证明　为了写法方便，记 $B_j=-A_j$。

令 $\mathscr{P}_k=\left\{M=(n_h)_{h=1}^{\infty}\subset N;\ \text{使}\bigcap_{h=1}^{k}(-1)^hA_{n_h}\neq\Phi\right\}$，则对任何 k，$\mathscr{P}_k$ 是 w^* 闭的。从而 $\mathscr{P}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathscr{P}_k$ 是 w^* 闭的。由推论6.2.15知，$\mathscr{P}$ 是 Ramsey 集。

$\mathscr{P}=\left\{M=\{n_h\}_{h=1}^{\infty}\subset N;\ \text{使}\bigcap_{h=1}^{k}(-1)^hA_h\neq\Phi,\forall k\right\}$，故存在 $L=\{m_p\}_{p=1}^{\infty}\in[N]$，使得或者 $[L]\subset\mathscr{P}$，或者 $[L]\subset[N]\backslash\mathscr{P}$。

由假设条件知，$[L]\subset[N]\backslash\mathscr{P}$ 不可能发生。事实上由假设条件知，对 $L=\{m_p\}_{p=1}^{\infty}$，存在 $s_0\in S$，使得

$$\{n\in L;s_0\in A_n\}\text{和}\{n\in L;s_0\in -A_n\}$$

均是无限集。故存在 L 的无限子序列 $L_0=\{n_h\}_{h=1}^{\infty}$，使得

$$s_0\in(-1)^hA_h,h=1,2,\cdots.$$

为此，$L_0\in\mathscr{P}$。所以，$[L]\not\subset[N]\backslash\mathscr{P}$。于是我们得到

$$[L]\subset\mathscr{P}.$$

(这表明 L 的任何子序列对应的集列，其奇数项为 B_n 型集，偶数项为 A_n 型，且这个集列的有限项交不空)。

令 $J=\{m_{2p}\}_{p=1}^{\infty}$。我们将证明 $(A_j,B_j)_{j\in J}$ 是 Bool 独立的。

令 $(\theta_p)_{p=1}^{k}$ 是 ±1 的有限序列，我们希望证明 $\bigcap\limits_{p=1}^{k}\theta_pA_{m_{2p}}\neq\Phi$。

取 L 的一个子集 $L_1=(n_h)_{h=1}^{\infty}$，使 $m_2,m_4,\cdots,m_{2k}$ 散布在 n_1，$n_2,\cdots,n_{2k}$ 之间，且如果 $n_h=m_{2p}$，则 $\theta_p=(-1)^h$（即在 m_2,m_4，$\cdots,m_{2k}$ 中插入一些项使之成为 L 的子集，且做到相应的集列的奇数项为 B_n 型集，偶数项为 A_n 型集），则

$$\bigcap_{h=1}^{2k}(-1)^hA_{n_h}\neq\Phi,$$

从而

$$\Phi\neq\bigcap_{h=1}^{2k}(-1)^hA_{n_h}\subset\bigcap_{p=1}^{k}\theta_pA_{m_{2p}}.$$

这就证明了 $(A_j,B_j)_{j\in J}$ 是 Bool 独立的。证毕。

定理 6.2.17(Rosenthal-Dor)

(1) 若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的有界序列，则

或者 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}\approx(e_n)_{l_1}$；

或者 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 是 w Cauchy 的。

(2) 若 X 是 Banach 空间，则

$l_1\not\hookrightarrow X\Longleftrightarrow U(X)$ 是 wCC。

证明 (1) 首先将 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 嵌入到 $C(U(X^*),w^*)$ 中去，

对每个 n，令 $f_n=J_X(x_n)_{U(X^*)}$，其中 $J_X:X\longrightarrow X^{**}$ 是典型嵌入映象。则 f_n 是 $(U(X^*),w^*)$ 上连续函数，即 $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset C(U(X^*),w^*)$。如果 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 没有子序列是 w Cauchy 的，那么 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 没有子序列是点点收敛的。

令 $\mathscr{D}=\{(D_k^1,D_k^2)_{k=1}^{\infty};D_k^i$ 是复平面上开圆盘，D_k^i 的中心为有理坐标，D_k^i 的半径为有理数，且

$$\operatorname{diam} D_k^1 = \operatorname{diam} D_k^2 < \frac{d(D_k^1, D_k^2)}{2}\Big\}.$$

于是存在一个指标 k_0 和 $M \in [N]$，使得对任何 $L \in [M]$，存在 $x_L^* \in U(X^*)$，使得

$\{f_n(x_L^*)\}_{n\in L}$ 有两个聚点分别在 $D_{k_0}^1$ 和 $D_{k_0}^2$ 中。 (6.19)

事实上，否则对任何指标 k，任何 $M \in [N]$，存在 $L \in [M]$，使得对每个 $s \in U(X^*)$，$\{f_n(s)\}_{n\in L}$ 的聚点或全在 D_k^1 中，或全在 D_k^2 中；或全不在 $D_k^1 \cup D_k^2$ 中。对 $k=1$，有 $M_1 \in [N]$，使得每个 $s \in U(X)$，$\{f_n(s)\}_{n\in M_1}$ 的聚点或者全在 D_1^1 中；或全在 D_1^2 中；或全不在 $D_1^1 \cup D_1^2$ 中。又存在 $M_2 \in [M_1]$，使得每个 $s \in U(X^*)$，$(f_n(s))_{n\in M_2}$ 的聚点或者全在 D_2^1 中；或者全在 D_2^2 中；或者全不在 $D_2^1 \cup D_2^2$ 中。继续下去可得 N 的无限个无限子序列，$\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$，使

$$N \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset M_{k+1} \supset \cdots$$

且对任何 k，任何 $s \in U(X^*)$，$(f_n(s))_{n\in M_k}$ 的聚点或者全在 D_k^1 中，或者全在 D_k^2 中，或者全不在 $D_k^1 \cup D_k^2$ 中。

取对角列，即取 $L = (m_k)_{k=1}^{\infty} \in N$，使 $m_k \in M_k$，$\forall k$，由假设 $(f_n)_{n\in L}$ 在 $U(X^*)$ 上不是点点收敛的。故存在 $s_0 \in U(X^*)$，使 $(f_n(s_0))_{n\in L}$ 有两个不同聚点 d_1, d_2。选 k_0，使 $d_1 \in D_{k_0}^1$，$d_2 \in D_{k_0}^2$，则

$$(f_{m_k}(s_0))_{k\geq k_0} \subset (f_n(s_0))_{n\in M_{k_0}},$$

则 $(f_n(s_0))_{n\in M_{k_0}}$ 有两个聚点分别在 $D_{k_0}^1, D_{k_0}^2$ 中，矛盾！故(6.19)成立。

令 α 是 $D_{k_0}^1$ 的中心，β 是 $D_{k_0}^2$ 的中心。不失一般性，假设 $\beta-\alpha$ 是实数，且 $\beta - \alpha > 0$ $\left(\text{否则令} r = \frac{|\beta-\alpha|}{\beta-\alpha}，\text{用} rD_{k_0}^1、rD_{k_0}^2，(rf_n)_{n\in M} \text{继续讨论即可}\right)$。

设 $M = (n_j)_{j=1}^{\infty}$。 $A_j = \{s \in U(X^*); f_{n_j}(s) \in D_{k_0}^1\}$，

$B_j = \{s \in U(X^*); f_{n_j}(s) \in D_{k_0}^2\}$，

$j = 1, 2, \cdots$，则 $A_j \subset U(X^*)$，$B_j \subset U(X^*)$，$A_j \cap B_j = \Phi$。且 $(A_j,$

$B_j)_{j=1}^{\infty}$没有子序列$(A_{j_h}, B_{j_h})_{h=1}^{\infty}$，使得对每个$s\in U(X^*)$，

或者$\lim\limits_{h\to\infty}\chi_{A_{j_h}}(s)=0$，或者$\lim\limits_{h\to\infty}\chi_{B_{j_h}}(s)=0$。

由引理6.2.16知，存在N的无限子集J，使$(A_j, B_j)_{j\in J}$是Bool独立的。

令$d=d(D_{k_0}^1, D_{k_0}^2)$，下面将证明对复数$c_j=a_j+ib_j, j\in J$，有

$$\|\sum_{j\in J}c_jf_{n_j}\|\geqslant\frac{d}{8}\sum_{j\in J}|c_j|.$$

令σ是J的任何有限子集，则

$$\sum_{j\in\sigma}|c_j|\leqslant\sum_{j\in\sigma}|a_j|+\sum_{j\in\sigma}|b_j|.$$

为简单起见，不妨设$\sum\limits_{j\in\sigma}|a_j|\geqslant\sum\limits_{j\in\sigma}|b_j|$，故

$$\sum_{j\in\sigma}|c_j|\leqslant 2\sum_{j\in\sigma}|a_j|.$$

令$\sigma_+=\{j; j\in\sigma, a_j\geqslant 0\}$，$\sigma_-=\{j; j\in\sigma, a_j<0\}$，则

$$\sigma_+\cap\sigma_-=\Phi, \sigma_+\cap\sigma^-=\sigma.$$

由于$(A_j, B_j)_{j\in J}$是Bool独立的，故选

$$s_1\in(\bigcap_{j\in\sigma_+}B_j)\cap(\bigcap_{j\in\sigma_-}A_j); s_2\in(\bigcap_{j\in\sigma_+}A_j)\cap(\bigcap_{j\in\sigma_-}B_j),$$

对$z_1\in D_{k_0}^1, z_2\in D_{k_0}^2$，有

$$\mathrm{Re}(z_2-z_1)\geqslant d,$$

$$|\mathrm{Im}(z_1-z_2)|\leqslant\mathrm{diam}D_{k_0}^1<\frac{d}{2}.\ 故$$

$$\|\sum_{j\in\sigma}c_jf_{n_j}\|=\sup_{s\in U(X^*)}|\sum_{j\in\sigma}c_jf_{n_j}(s)|\geqslant\mathrm{Re}\sum_{j\in\sigma}c_jf_{n_j}\left(\frac{s_1-s_2}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j\in\sigma}a_j\mathrm{Re}(f_{n_j}(s_1)-f_{n_j}(s_2))-\frac{1}{2}\sum_{j\in\sigma}|b_j\mathrm{Im}(f_{n_j}(s_1)$$

$$-f_{n_j}(s_2))|\geqslant\frac{d}{2}\sum_{j\in\sigma}|a_j|-\frac{d}{4}\sum_{j\in\sigma}|b_j|\geqslant\frac{d}{4}\sum_{j\in\sigma}|a_j|$$

$$\geqslant\frac{d}{8}\sum_{j\in\sigma}|c_j|,$$

这表明$(x_{n_j})\approx(e_n)_{l_1}$。证毕。

(2) 若 X 是 Banach 空间，$l_1 \not\hookrightarrow X$，则由(1)易见 $U(X)$ 是 w CC。反之，若 $l_1 \hookrightarrow X$，令 T 是 $l_1 \longrightarrow X$ 内的线性同胚，令 $Te_n = x_n$，其中 (e_n) 为 l_1 的自然基。则

$\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n=1}^{\infty} \subset U(X)$，且 $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ 没有 w Cauchy 子列（因为 $(e_n)_{l_1}$ 没有 w Cauchy 子列）。证毕。

引理 6.2.18 设 Y 是某个共轭空间 X^* 的可分子空间，则存在 X 的可分子空间 Z，使 Y 线性等距于 Z^* 的子空间。

证明。任取 Y 的可数稠子集 $(x_m^*)_{m=1}^{\infty}$，选 $(x_{m,n})_{n,m=1}^{\infty}$，使

$$\|x_{m,n}\| = 1,$$

且

$$|x_m^*(x_{m,n})| > \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x_m^*\|, \forall n, m.$$

令 $Z = \overline{\text{span}}(x_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$，显然 Z 是 X 的可分子空间。

定义 $T: Y \longrightarrow Z^*$，$Tx^*(z) = x^*(z)$，$\forall x^* \in Y$；$z \in Z$。则

$$\|x^*\| = \sup_{n,m}|x^*(x_{m,n})| \leqslant \|Tx^*\| \leqslant \|x^*\|, \forall x^* \in Y,$$

从而 T 是 $Y \longrightarrow Z^*$ 内线性等距。证毕。

为了讨论 DP 算子 $T \in DP(L_1, X^*)$，我们再给出这种算子的特征(记住我们记 $L_p = L_p[0,1]$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$)。

定理 6.2.19 设 $T \in L(L_1, X)$，则 TFAE：

(1) $T \in DP(L_1, X)$；

(2) $Ti_p \in K(L_p, X)$，$1 < p < +\infty$，其中 i_p 是 $L_p \longrightarrow L_1$ 的恒等算子；

(3) $Ti_\infty \in K(L_\infty, X)$，其中 i_∞ 为 $L_\infty \longrightarrow L_1$ 的恒等算子。

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $1 < p < +\infty$，因 $U(L_p)$ 是 w 紧的，且 $i_p: L_p \longrightarrow L_1$ 是连续的（也是 w-w 连续的），故 $i_pU(L_p)$ 是 w 紧的，又因 $T \in DP(L_1, X)$，故 $Ti_pU(L_p)$ 是紧的。从而 $Vi_p \in K(L_p, X)$。证毕。

$(2)\Longrightarrow(3)$　$1<p<+\infty$，我们有下列交换图：

$$
\begin{array}{ccccc}
L_\infty & \xrightarrow{i_\infty} & L_1 & \xrightarrow{T} & X \\
& \searrow^{i_{\infty,p}} & \nearrow_{i_p} & & \\
& & L_p & &
\end{array}
$$

其中 $i_{\infty,p}$，i_p 均为恒等算子，故 $Ti_\infty=Ti_pi_{\infty,p}$。

由假设 Ti_p 为紧算子，故 $Ti_\infty\in K(L_\infty,X)$。证毕。

$(3)\Longrightarrow(1)$　若 T 不是 DP 算子，则存在 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty\subset L_1$ 使

$$\varphi_n\xrightarrow{w}0,$$

但

$$\inf_n\|T\varphi_n\|\geqslant\varepsilon>0,$$

对某个 $\varepsilon>0$。

令 $I_{n,k}=[(k-1)2^{-n},k2^{-n})$，$k=1,\cdots,2^n$；$\Sigma_n=\sigma((I_{n,k})_{k=1}^{2^n})$，则 $E(\cdot|\Sigma_n):L_1\longrightarrow L_1$ 是有限秩压缩投影。所以，

$$E(\varphi_m|\Sigma_n)\xrightarrow{w}0,$$

当 $m\to\infty$ 时，又由于 $(E(\varphi_m|\Sigma_n))_{m=1}^\infty\subset[\chi_{I_{n,k}}]_{k=1}^{2^n}$（$L_1$ 的有限维子空间），故

$$\lim_m\|E(\varphi_m|\Sigma_n)\|=0.$$

取 $\delta=\frac{1}{4}\varepsilon\|T\|^{-1}$，因此可选子列 $(\varphi_{n_k})_{k=1}^\infty$，使

$$\|E(\varphi_{n_k}|\Sigma_k)\|<\delta,\ \forall k.$$

我们不妨假设 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ 满足：

$$\|E(\varphi_n|\Sigma_n)\|<\delta.$$

由于 $\varphi_n\xrightarrow{w}0$，故 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ 是一致可积的，从而

$$\lim_{k\to\infty}\sup_n\int_{(|\varphi_n|>k)}|\varphi_n|dt=0.$$

故存在 $K>0$，使对每个 n，有

$$\int_{(|\varphi_n|>K)} |\varphi_n| dt \leqslant \delta.$$

令 $\psi_n = \begin{cases} \varphi_n, \text{当} |\varphi_n(t)| \leqslant K \text{ 时}, \\ 0, \text{当} |\varphi_n(t)| > K \text{ 时} \end{cases}$

则 $\psi_n \in L_\infty$，且 $\|\psi_n\|_\infty \leqslant K$，$\|\psi_n - \varphi_n\|_1 < \delta$。

令 $\eta_n = \psi_n - E(\psi_n | \Sigma_n)$，则 $\eta_n \in L_\infty$，且

$$\|\eta_n\|_\infty \leqslant 2K,$$

还有当 $n > m$ 时，

$$\int_0^1 \eta_n \cdot \chi_{I_{m,l}} dt = \int_{I_{m,l}} (\psi_n - E(\psi_n | \Sigma_n)) dt = 0.$$

又因为 $\overline{\text{span}}(\chi_{I_{n,l}}; l = 1, \cdots, 2^n, n = 1, 2, \cdots) = L_1$，故

$$\eta_n \xrightarrow{\sigma(L_\infty, L_1)} 0.$$

由此得 $i_\infty \eta_n \xrightarrow{\sigma(L_1, L_\infty)} 0$，从而 $Ti_\infty \eta_n \xrightarrow{w} 0$。因此 $(Ti_\infty \eta_n)_{n=1}^\infty$ 如果有子序列范数收敛，则极限点必是 0。

另一方面，

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \eta_n\|_1 &\leqslant \|\varphi_n - \psi_n\|_1 + \|\psi_n - \eta_n\|_1 \\ &= \|\varphi_n - \psi_n\|_1 + \|\psi_n - \psi_n + E(\psi_n | \Sigma_n)\|_1 \\ &\leqslant \|\varphi_n - \psi_n\|_1 + \|E(\varphi_n | \Sigma_n)\|_1 + \|E(\psi_n - \varphi_n | \Sigma_n)\|_1 \\ &\leqslant 2\|\varphi_n - \psi_n\|_1 + \delta < 3\delta, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|Ti_\infty \eta_n\| &\geqslant \|T\varphi_n\| - \|T\| \cdot \|\varphi_n - \eta_n\|_1 \\ &\geqslant \varepsilon - \|T\| \cdot 3\delta \geqslant \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

因此 $(Ti_\infty \eta_n)_{n=1}^\infty$ 没有子序列范数收敛于 0，从而 $(Ti_\infty \eta_n)_{n=1}^\infty$ 没有子序列范数收敛，这与 $Ti_\infty \in K(L_\infty, X)$ 矛盾！证毕。

定理 6.2.20 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) $l_1 \not\hookrightarrow X$；

(2) $L(L_1, X^*) = DP(L_1, X^*)$；

(3) $L_1 \not\hookrightarrow X^*$。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $T\in L(L_1,X^*)$，由于 L_1 是可分的，故 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 是可分的，由引理 6.2.18 知，存在可分 $Y\subset X$，使 $\mathscr{R}(T)\subset Y^*$，因为 $l_1\not\hookrightarrow X\Longrightarrow l_1\not\hookrightarrow Y$，故我们可假设 X 是可分 Banach 空间，$l_1\not\hookrightarrow X$，且 $T\in(L_1,X^*)$。

T 对应一个一致有界 X^* 值的 Martingale$(\xi_n,\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$，由引理 2.3.13，存在 w^* 可测函数 $g:[0,1]\longrightarrow X^*$，$\sup\limits_t\|g(t)\|\leqslant\|T\|$，使得对任何 $x\in X$，存在 $N_x\subset[0,1]$，使 $m(N_x)=0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,\xi_n(t)\rangle=\langle x,g(t)\rangle,\forall\omega\notin N_x.$$

由于 X 是可分的，容易看到，存在 $M\subset[0,1]$，使 $m(M)=0$，且当 $t\notin M$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,\xi_n(t)\rangle=\langle x,g(t)\rangle,\forall x\in X.$$

因此，对任 $x\in X,f\in L_1$，有

$$(Tf)(x)=\lim_n\int\xi_n(t)f(t)xdt=\int f(t)g(t)xdt.$$

由定理 6.2.19 知，只须证 $Ti_\infty\in K(L_\infty,X)$ 即可。

令$S:X\longrightarrow L_1$，$(Sx)(t)=g(t)x,\forall x\in X,t\in[0,1]$。则有 $S^*:L_\infty\longrightarrow X^*$，且对 $\forall x\in X,f\in L_\infty$，有

$$\langle x,S^*f\rangle=\langle Sx,f\rangle=\langle g(t)x,f\rangle=\langle x,Ti_\infty f\rangle,$$

从而 $S^*f=Ti_\infty f$，$\forall f\in L_\infty$。因此 $S^*=Ti_\infty$。为了证明 S^* 是紧的，只须证明 S 是紧算子即可。

任取$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$，则

$$Sx_n=g(t)x_n$$

是 L_∞ 中元，且$\|Sx\|_\infty\leqslant\|T\|$。

由于 $l_1\not\hookrightarrow X$，根据 Rosenthal 定理，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$有子序列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$是 w Cauchy 的。从而

$$Sx_{n_i}=g(t)x_{n_i}\longrightarrow a(t),$$

$a(t)$是可测的，由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$Sx_{n_i}\xrightarrow{\|\cdot\|_1}a(t).$$

即$(Sx_i)_{n=1}^{\infty}$在L_1中是范数收敛的。这表明S是紧算子。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然(因为恒等算子不是DP算子)证毕。

(3)$\Longrightarrow$(1) 若$l_1 \subset\!\!\rightarrow X$,设$T$: $l_1 \longrightarrow X$是内线性同胚,因此,T^*: $X^* \longrightarrow l_\infty$是满映射,故$l_\infty \approx X^*/\mathrm{Ker}(T^*)$,但$L_1$线性等距于$l_\infty$的一个子空间(可分空间均可等距嵌入$l_\infty$)。设:$Q$: $X^* \longrightarrow X^*/\mathrm{Ker}(T^*)$是商映象,则由Grothendieck定理(见Gro-1)("L_1关于共轭空间提升性质")。存在$\hat{S}$: $L_1 \longrightarrow X^*$,使$Q\hat{S}=S$,其中S: $L_1 \longrightarrow X^*/\mathrm{Ker}(T^*)$内线性同胚,故

$$\|\hat{S}f\| \geqslant \|Q\hat{S}f\| = \|sf\| \geqslant \|S^{-1}\|^{-1}\|f\|, \forall f \in L_1,$$

这表明$L_1 \subset\!\!\rightarrow X^*$。证毕。

定理 6.2.21 设X是Banach空间,则

$$l_1 \not\subset\!\!\rightarrow X \Longleftrightarrow C[0,1]^* \not\subset\!\!\rightarrow X^*.$$

证明 "$\Longrightarrow$" 由定理6.2.20知,$l_1 \not\subset\!\!\rightarrow X \Longleftrightarrow L_1 \not\subset\!\!\rightarrow X^*$,另一方面,显然,$L_1$线性等距于$C[0,1]^*$的一个(闭)子空间(事实上,令

$$\Phi_f(g) = \int_0^1 fg\,dt, \forall f \in L_1, g \in C[0,1], \Phi_f \in C[0,1]^*,$$

则$\Phi_f \in [0, 1]^*$,且$\|\Phi_f\| = \|f\|$)。故

$$l_1 \not\subset\!\!\rightarrow X \Longrightarrow C[0, 1]^* \not\subset\!\!\rightarrow X^*.$$ 证毕。

"$\Longleftarrow$" 假设,$l_1 \subset\!\!\rightarrow X$,设$Y \subset X$, $Y \approx l_1$。

由于$C[0,1]$是可分的,(故参见定理1.1.5,及利用$Y \approx l_1$)存在满映射T: $Z \longrightarrow C[0,1]$,因此存在$r>0$,使得

$$rU(C[0,1]) \subset TU(Y).$$

令J_0为$C[0,1] \longrightarrow C[0, 1]^{**}$的典型嵌入,$J_1$为$C[0,1]^* \longrightarrow C[0,1]^{***}$的典型嵌入。容易验证$J_0^* \cdot J_1$: $C[0,1]^* \longrightarrow C[0,1]^*$为恒等映象(对任何Banach空间均成立)。

$J_0 T$: $Y \longrightarrow C[0,1]^{**}$是有界线性算子。由于$C[0,1]^{**}$是内射(injective)空间(因为$C[0,1]^*$是具$w$单位的抽象$L_1$空间,从而$C[0,1]^* \simeq L_1(\mu)$,对某个有限测度空间,故$C[0,1]^{**} \simeq L_\infty(\mu)$(详

④

细见参考书(L-T, Ⅰ)）故存在 J_0T 的延拓 $\tilde{T}: X\longrightarrow C[0,1]^{**}$.

我们有 $(\tilde{T})^*J_1: C[0,1]^*\longrightarrow X^*$是内线性同胚. 事实上，显然，$\tilde{T}U(X)\supset rJ_0(U(C[0,1]))$，故对每个 $\mu\in C[0,1]^*$,有

$$\|(\tilde{T})^*J_1\mu\| = \sup_{x\in U(X)}|\langle x,(\tilde{T})^*J_1\mu\rangle| = \sup_{x\in U(X)}|\langle \tilde{T}x, J_1\mu\rangle|$$

$$\geqslant r\sup_{y\in U(C[0,1])}|\langle Jy, J_1\mu\rangle| = r\sup_{y\in U(C[0,1])}|\langle y, J^*J_1\mu\rangle|$$

$$= r\sup_{y\in U(C[0,1])}|\langle y,\mu\rangle| = r\|\mu\|.$$

证毕.

定理 6.2.22 设 X 是 Banach 空间,则 TFAE:

(1) $l_1 \not\hookrightarrow X$;

(2) 每个 $L_\infty(X^*)$ 有界的 Martingale (f_n,Σ_n) 是 Pettis-Cauchy 的.

证明: "$\Longleftarrow$" 若每个 $L_\infty(X^*)$有界的 Martingale (f_n,Σ_n)是 Pettis-Cauchy 的，由定理 2.3.22 知,$L(L_1,X^*)=DP(L_1,X^*)$, 从而由定理 6.2.10 知 $l_1\not\hookrightarrow X$. 证毕.

"$\Longrightarrow$" 设 $l_1\not\hookrightarrow X$，且 (f_n,Σ_n) 是 $L_\infty(X^*)$ 有界Martingale (即f_n: $[0,1]\longrightarrow X^*$, $\sup\limits_n\|f_n(t)\|_\infty\leqslant K$, 且 Σ_n 为$[0,1]$的 Lebeegue 可测子集的 σ 代数).

定义 S: $X\longrightarrow L_\infty$,

$$(Sx)(t) = \lim_n f_n(t)(x), \forall x\in X, \text{a.e } t\in[0,1].$$

(S 是可以定义的,事实上,对固定 $x\in X$, $(f_n(t)x,\Sigma_n)$ 是纯量一致有界 Martingale,由定理 2.3.3 及定理 2.2.10 知 $(f_n(t)x)_{n=1}^\infty$a.e 收敛)

$$S^*|_{L_1}: L_1\longrightarrow X^*, \text{对任}\varphi\in L_1,$$

$$(S^*\varphi)(x) = \varphi(Sx) = \int_0^1\varphi(t)(Sx)(t)dt$$

$$= \lim_n\int_0^1\varphi(t)f_n(t)xdt = \lim_n\left(\int_0^1\varphi f_n dt\right)(x), \forall x\in X.$$

故

$$S^*\varphi=\lim_n\int_0^1 f_n\varphi dt.$$

由于 $l_1 \not\hookrightarrow X^*$，根据定理 6.2.20 知，$S^*|_{l_1}\in DP(L_1,X^*)$；由定理 6.2.19 知，$S^*|_{L_\infty}:L_\infty\longrightarrow X^*$ 是紧的，从而 $S:X\longrightarrow L_1$ 是紧的(注意此处将 S 看作 X 到 L_1 的线性算子)。

令 $E(\cdot|\Sigma_n)$为条件期望算子，则对 $A\in\Sigma_n$，有

$$\int_A E(S_x|\Sigma_n)dt=\int_A Sxdt=\lim_n\int_A f_n xdt$$
$$=\int_A f_n(t)xdt.$$

故

$$E(S_x|\Sigma_n)=f_n(t)x,\quad \forall x\in X.$$

令 $S_n=E(\cdot|\Sigma_n)\cdot S$，因为 S 是紧算子，故 S_n 也是紧算子。从而 $S_n\longrightarrow S$ (因

$$\lim_n E(Sx|\Sigma_n)=\lim_n f_n(t)x=Sx,$$

又因 $E(\cdot|\Sigma_n)$是范数为 1 的投影，$SU(X)$是相对紧的，故 S_n 按算子范数收敛于 S)。从而 S_n 是 $L(X,L_1)$中 Cauchy 列，即

$$0=\lim_{n,m}\|S_n-S_m\|=\lim_{n,m}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|S_nx-S_mx\|$$
$$=\lim_{n,m}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\int_0^1|f_n(t)x-f_m(t)x|dt.$$

这表明 $(f_n)_{n=1}^\infty$ 是 Pettis-Cauchy 的。证毕。

定义 6.2.10 Banach 空间 X 的一个子集 T 称为一个无限树，如果下列条件成立：

$(T\cdot 1)$ $\quad T=\{x_n^i\in X;1\leqslant i\leqslant 2^{n-1},n=1,2,\cdots\}$，其中

$$x_n^i=\frac{1}{2}(x_{n+1}^{2i-1}+x_{n+1}^{2i}).$$

如果T还满足

$(T\cdot 2)$ $\quad \|x^i\|\leqslant K,1\leqslant i\leqslant 2^{n-1},n=1,2,\cdots,$

则称 T 为有界无限树。

又 T 还满足

$(T\cdot 3)$　　存在分离常数 $\varepsilon=2\delta$，即

$$\|x_{n+1}^{2i-1}-x_{n+1}^{2i}\|\geqslant\varepsilon=2\delta.$$

则称 T 为有界无限 δ 树。

注　有界无限树T对应一个一致有界（即$L_\infty(X)$有界）Martingale（例 $T=(x_n)$为有界无限树），

令

$$f_1(t)=x_1\chi_{[0,1]}$$

$$f_2(t)=x_2\chi_{[0,\frac{1}{2})}+x_3\chi_{[\frac{1}{2},1)}$$

$$f_3(t)=x_4\chi_{[0,\frac{1}{4})}+x_5\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}+x_6\chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}+x_7\chi_{[\frac{3}{4},1)}.$$

$$\vdots$$

有界无限 δ 树对应一个 $L_\infty(X)$ 有界不是 Bochner-Cauchy 的 Martihgale。事实上。$\|f_n(t)-f_{n+1}(t)\|\geqslant\delta$。□

定义 6.2.11　$(x_n)_{n=1}^{\infty}$称为有界 Rademacher-δ 树，如果它是树，即

$$x_1=\frac{x_2+x_3}{2},\quad x_2=\frac{x_4+x_5}{2},\quad x_3=\frac{x_6+x_7}{2},\cdots,$$

且

$$\sup_n\|x_n\|\leqslant K<+\infty,$$

且 $\exists\delta>0$，使

$$\|x_1\|\geqslant\delta,\quad\|x_2-x_3\|\geqslant2\delta,\quad\|x_4-x_5+x_6-x_7\|\geqslant4\delta,\cdots$$

注　容易看到有界 Rademacher-δ 树是有界无限 δ 树。□

定理 6.2.23　设 X 是 Banaeh 空间，则

$l_1\not\subset\!\!\rightarrow X\Longleftrightarrow X^*$ 不含有界 Rademacher-δ 树

证明　"$\Longleftarrow$" 若 $l_1\subset\!\!\rightarrow X$，由定理 6.2.10，$L_1\subset\!\!\rightarrow X^*$，令 T：$L_1\longrightarrow X^*$ 是内线性同胚。

L_1 的"自然树"$x_1=\chi_{[0,1)}$，$x_2=2\chi_{[0,\frac{1}{2})}$，$x_3=2\chi_{[\frac{1}{2},1)}$，

$x_4=4\chi_{[0,\frac{1}{4})}$，$x_5=4\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$，$x_6=4\chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$，$x_7=4\chi_{[\frac{3}{4},1)}$，$\cdots$

是有界 Rademacher-1 树。因为有界 Rademacher-δ 树关于线

性同胚不变，故(T^*x_n)是X^*中有界Rademacher-δ树。证毕。

"$\Longrightarrow$" 若X^*含有界Radermacher-δ树，作相应的Martingale：

$f_1 = x_1^* \chi_{[0,1)}$

$f_2 = x_2^* \chi_{[0,\frac{1}{2})} + x_3^* \chi_{[\frac{1}{2},1)}$

$f_3 = x_4^* \chi_{[0,\frac{1}{4})} + x_5^* \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})} + x_6^* \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})} + x_7^* \chi_{[\frac{3}{4},1)}$

………………

则 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是$L_\infty(X^*)$有界的Martingale，下面证明它不是Pettis-Cauchy的，从而由这理6.2.11知，$l_1 \subset\!\!\to X$。

事实上，

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \int_0^1 |f_{n+1}(t)x - f_n(t)x|\,dt$$

$$\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|x_{2^n}^* - x_{2^n+1}^* + \cdots + x_{2^{n+1}-2}^* - x_{2^{n+1}-1}^*\|.$$

$$\geq \delta > 0$$

证毕。

定理 6.2.24 设X是Banach空间，则TFAE：

(1) $l_1 \not\subset\!\!\to X$；

(2) 每个$T \in L(X, L_\infty)$，T映有界列为具a.e收敛子列的序列。

证明 令$i_{\infty,1}: L_\infty \longrightarrow L_1$为恒等映象。

易见对$S \in L(X, L_\infty)$，

S映有界列为具a.e收敛子列的序列

$$\Longleftrightarrow i_{\infty,1} S \in K(X, L_1).$$

$$\Longleftrightarrow S^* i_{\infty,1}^* \in K(L_\infty, X^*).$$

(2)$\Longrightarrow$(1) 设$T \in L(L_1, X^*)$，则存在$S \in L(L_1, X^*)$，使得$S^* i_{\infty,1}^* = T i_{\infty,1}$。事实上，由于每个$T \in L(L_1, X^*)$对应一个一致有界$X^*$值Martingale (ξ_n, Σ_n)，其中Σ_n是由$\{I_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$生成的σ代数，而$I_{n,k} = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n})$。使

$$Tf=\lim_n\int_0^1\xi_n f dt,\quad \forall f\in L_1.$$

由引理 2.3.13 知，存在 w^* 可测函数 $g:[0,1]\longrightarrow X^*$，使得对任何 $x\in X$，

$$\langle x, g(t)\rangle \xlongequal{a.e} \lim^n \langle x, \xi_n(t)\rangle$$

且 $\|g(t)\|\leqslant K$。从而

$$(Tf)(x)=\lim_n\int_0^1(\xi_n f)(x)dt$$

$$=\int_0^1(fg)(x)dt,\quad \forall x\in X,\ f\in L_1.$$

定义 $S:X\longrightarrow L_\infty$, $(Sx)(t)=g(t)x, x\in X, t\in[0,1]$，则 $Sx\in L_\infty$，且

$$S^*i_{\infty,1}^*(f)=Ti_{\infty,1}(f),\ \forall f\in L_\infty.$$

由条件及一开始的等价性知，$S^*i_{\infty,1}^*\in K(L_\infty,X^*)$，因此，$Ti_{\infty,1}\in K(L_\infty,X^*)$，由定理 6.2.8 知，$T\in DP(L_1,X^*)$，即

$$L(L_1,X^*)=DP(L_1,X^*),$$

再由定理 6.2.20 得到，$l_1\not\hookrightarrow X$。证毕。

(1)$\Longrightarrow$(2) 若 $l_1\not\hookrightarrow X$，由定理 6.2.20 知，$L(L_1,X^*)=DP(L_1,X^*)$，因此对每个 $S\in L(L_1,X^*)$，有 $S\cdot i_{\infty,1}\in K(L_\infty,X^*)$ (定理6.2.19)。

任取 $T\in L(X,L_\infty)$，则易见 $T^*i_{\infty,1}^*:L_\infty\longrightarrow X^*$ 是紧的（实际上，$T^*i_{\infty,1}^*$ 看作 $T^*|_{L_1}\cdot i_{\infty,1}$)，因此，根据一开始等价条件知，$T$ 映有界列为具 a.e 收敛子列的序列。证毕。

定理 6.2.24 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE:

(1) $l_1\not\hookrightarrow X$;

(2) 对每个 $L_1(X^*)$ 有界，一致可积 Martingale(f_n,Σ_n)，存在 $f:[0,1]\longrightarrow X^*$，使得对每个 $x^{**}\in X^{**}$，

$$\lim_n x^{**}f_n(t)\xlongequal{a.e}x^{**}f(t).$$

证明 这个定理的证明要借助于 $l_1\not\hookrightarrow X$ 与 X^* 具 wRNP 等价这一结果（关于它的证明参见(Du-1))。

(1) $\Longrightarrow$ (2) 任取 $L_1(X^*)$ 有界一致可积 Martingale(f_n, Σ_n)。令

$$F(E)=\lim_n\int_E f_n dt \qquad \forall E\in\sigma(\bigcup_n\Sigma_n),$$

因为 (f_n) 是 Martingale、$L_1(X^*)$ 有界且一致可积，故 F 是 m 一连续、有界变差的向量测度。因为 $l_1\not\subset_{\to}X$，故 X^* 具 wRNP，从而存在 $f:[0,1]\longrightarrow X^*$，使

$$x^{**}F(E)=\int_E x^{**}fdt,\quad \forall x^{**}\in X^{**}.$$

于是

$$E(x^{**}f\mid\Sigma_n)=x^{**}f_n,\quad \forall x^{**}\in X^{**}.$$

因此，由定理 2.2.4 知，对任 $x^{**}\in X^{**}$，有

$$x^{**}f_n(t)\xrightarrow{\text{a、e}}x^{**}f(t).$$ 证毕

(2) $\Longrightarrow$ (1) 由于 $l_1\not\subset_{\to}X$ 等价于 X^* 具 wRNP，故我们证明此时 X^* 具 wRNP。

任取 F 是 $([0,1],\ \mathscr{L},\ m)$ 上一连续有界变差 X^* 值向量测度。

令 (π_n) 是 $[0,1]$ 中二进分割序列。

$$f_n=\sum_{E\in\pi_n}\frac{F(E)}{m(E)}\chi_E.$$

则 $(f_n,\sigma\pi_n))_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_1(X^*)$ 有界一致可积 Martingale。由假设存在 $f:[0,1]\longrightarrow X^*$，使得对任 $x^{**}\in X^{**}$，有

$$x^{**}f_n(t)\xrightarrow{\text{a、e}}x^{**}f(t).$$

故

$$x^{**}F(E)=\lim_n\int_E x^{**}f_n dt=\int_E x^{**}fdt,\ \forall E\in\mathscr{L}$$

故 X^* 具 wRNP．证毕。

下面我们讨论当 X 可分时含 l_1 的等价条件。

定理 6.2.25 设 X 是可分 Banach 空间，则 TFAE:

S(1)：$l_1\not\subset_{\to}X^*$;

$S(2)$ $\overline{X}^{sw^*}=X^{**}$;

$S(3)$：$\overline{U(X)}^{w^*}=U(X^{**})$。

$S(4)$：$\text{Card}\, X=\text{Card}\, X^{**}$。

$S(5)$：对 X 中任何有界集A，有 $\overline{A}^{sw}=\overline{A}^{w}$。

$S(6)$：对 X^{**} 中任何有界集 A，有 $\overline{A}^{sw^*}=\overline{A}^{w^*}$。

$S(7)$：X^* 具(ω)性质(即 X^{**} 的每个有界序列有 w^* 收敛的子序列)

$S(8)$：$l_1(\Gamma)\not\subset_{\to}X^*$，$\forall$ 不可数 Γ。

$S(9)$：$l_1[0,1]\not\subset_{\to}X^*$。

$S(13)$：对每个 $x^{**}\in X^{**}$,X^* 的每个 w^* 紧集 A，$x^{**}|_A$ 有一个 w^* 连续点。

证明 $S(2)\Longrightarrow S(4)$ 因 X 是不可分的，故 $\text{Card}X=\mathscr{X}_1$（连续统）但

$$\text{Card}\,\overline{X}^{sw^*}=\text{Card}X,$$

故

$$\text{Card}\, X^{**}=\text{Card}\,\overline{X}^{sw^*}=\text{Card}\, X=\mathscr{X}_1.$$

$S(4)\Longrightarrow S(1)$ 若 $l_1\subset_{\to}X$，则 $l_1^{**}\subset_{\to}X^{**}$，因为 $\text{Card}l_1^{**}>\mathscr{X}_1$（见下注），故

$$\text{Card}X^{**}\geqslant\text{Card}l_1^{**}>\mathscr{X}_1=\text{Card}X.$$

证毕。

注 $l_1^{**}>\mathscr{X}_1$ 的证明：先证明 $l_1[0,1]\subset(C[0,1])^*\subset l_\infty$。事实上，作为习题读者可证，若 X 是可分的，则 X 及 X^* 可线性等距嵌入 l_∞。因为 $C[0,1]$是可分的，故立即得到

$$(C[0,1])^*\subset l_\infty\ (\text{线性等距嵌入})。$$

下面证$l_1[0,1]\subset(C[0,1])^*$，任取 $f\in C[0,1]$，$x\in l_1[0,1]$，

令 $F_x(f)=\Sigma f(t)x(t)$（注意当 $x\in l_1[0,1]$时，

$$\text{supp}\, x=\{t\in[0,1];x(t)\neq0\}$$

是可数的，且 $\|x\|=\sum\limits_{t\in\text{supp}x}x(t)$）则

$$|F_x(f)|\leqslant\Sigma|f(t)|\cdot|x(t)|\leqslant\|x\|\cdot\|f\|.$$

故$\|F_x\|\leqslant\|x\|$。反之，对于$x\in l_1[0,1]$，令$\mathrm{supp}\, x=\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，则

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}|x(t_i)|.$$

选$f_n\in C[0,1]$，$\|f_n\|=1$，使

$$F_X(f_n)\geqslant\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)|;$$

从而$\|F_x\|\geqslant\|x\|$，从而$\|F_x\|=\|x\|$。因此

$$l_1[0,1]\subset(C[0,1])^*\text{(线性等距嵌入)}$$

我们得到$l_1[0,1]\subset l_\infty$，因此，

$$l_\infty^*/l_1[0,1]^\perp\cong l_1^{**}/l_1[0,1]^\perp\cong l_1^*[0,1]=l_\infty[0,1].$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\, l_\infty^*=\mathrm{Card}\, l_1^{**}&\geqslant\mathrm{Card}\, l_1^{**}/l_1[0,1]^\perp\\&=\mathrm{Card}\, l_\infty[0,1]=2^{\mathscr{X}_1}>\mathscr{X}_1.\end{aligned}$$

证毕。□

$S(6)\Longrightarrow S(7)$　任取$(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}\subset U(X^{**})$，由假设知，

$$\overline{\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}}^{w^*}=\overline{\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}}^{sw^*}$$

任取

$$x_0^{**}\in\overline{\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}}^{sw^*},$$

则有$(x_{n_i}^{**})_{i=1}^{\infty}\subset(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}$，使

$$x_{n_i}^{**}\xrightarrow{w^*}x_0^{**}.$$

即X^*具(ω)性质。证毕。

$S(7)\Longrightarrow S(1)$　若$l_1\hookrightarrow X$，设$T: l_1\longrightarrow X$是内线性同胚。(Te_n)是X中有界序列，它没有wCauchy子序列，从而$(\widehat{Te_n})_{n=1}^{\infty}$是$X^{**}$中有界序列，它没有$w^*$ Cauchy子序列，即X^*不具(ω)性质。证毕。

$S(6)\Longrightarrow S(3)$　显然。

$S(3)\Longrightarrow S(2)$　显然。

$S(6)\Longrightarrow S(5)$　若A是X的有界集。任取$x\in\overline{A}^{\omega}$，易见$\hat{x}\in\overline{A}^{w^*}$，由假设$\hat{x}\in\overline{A}^{sw^*}$，从而$x\in\overline{A}^{sw}$。即$\overline{A}^{sw}=\overline{A}^{\omega}$。　证毕。

$S(5) \Longrightarrow S(1)$ 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 X 中有界序列，取$x \in \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$，由假设 $x \in \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$，故存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的序列 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$，使 $x_{n_j} \xrightarrow{w} x$，这表明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有子序列是 wCauchy 的。由定理 6.2.17知，$l_1 \not\hookrightarrow X$。证毕

$S(8) \Longrightarrow S(9)$ 显然。

$S(9) \Longrightarrow S(1)$ 若 $l_1 \subset_{\to} X$，设 $T: l_1 \longrightarrow X$ 为内线性同胚，从而T^*：$X^* \longrightarrow l_\infty$为满映象。 $l_1[0,1] \subset (C[0,1])^* \subset l_\infty$。（见$S(4) \Longrightarrow S(1)$证明后的注）。取 $(x_t^*) \subset X^*$，使 $T^* x_t^* = e_t$（其中$(e_t)_{t \in [0,1]}$是 $l_1[0,1]$的"自然基"，即 $e_t = \chi_t$）且 $\|x_t^*\| \leqslant K$，易见$\overline{\mathrm{span}}(x_t^*)_{t \in [0,1]} \approx l_1[0,1]$，即 $l_1[0,1] \subset_{\to} X^*$。证毕。

$S(6) \Longrightarrow S(8)$ 若 $l_1(\Gamma) \subset_{\to} X^*$，对某个不可数 Γ，令 T：$l_1(\Gamma) \longrightarrow X^*$ 是内线性同胚，则 $T^*: X^{**} \longrightarrow l_\infty(\Gamma)$ 是 w^*—w^* 连续的满有界线性算子，从而 $(T^*)^{-1}(U(l_\infty(\Gamma))$ 是 w^* 闭的，且存在适当 α，使 w^* 紧集 K，

$$K = \{(T^*)^{-1}(U(l_\infty(\Gamma))\} \cap \alpha U(X^{**})$$

满足 $T^* K = U(l_\infty(\Gamma))$。

由于 $c_0(\Gamma)$ 中序列的 w^* 极限点只有可数的支撑，故

$$\overline{U(c_0(\Gamma))}^{sw^*} \neq \overline{U(c_0(\Gamma))} = U(l_\infty(\Gamma))。$$

令

$$A = (T^*|_K)^{-1}(U(c_0(\Gamma)))$$

是 X^{**} 中有界集，则

$$T^*(\overline{A}^{w^*}) = T^*\left(\overline{(T^*|_K)^{-1}/(U(c_0(\Gamma)))}^{w^*}\right)$$

$$= \overline{U(c_0(\Gamma))}^{w^*} = U(l_\infty)$$

$$T^*(\overline{A}^{sw^*}) = T^*\left(\overline{(T^*|_K)^{-1}(U(c_0(\Gamma)))}^{sw^*}\right)$$

$$= \overline{U(c_0(\Gamma))}^{w^*}$$

因此，$\overline{A}^{w^*} \neq \overline{A}^{sw^*}$。证毕。

$S(1) \Longrightarrow (S(13)) \Longrightarrow S(6)$ 为了证明这个推理，我们要用到

几个点集拓扑的深刻定理（由于篇幅有限，我们不给出它们的证明，请读者参考有关文献）。

设 T 是拓扑空间，记

$\mathscr{B}_1(T)=\{T$ 上 Baire 第一类函数 f（即 f 是 T 上一列连续函数的点点极限）$\}$

$\mathscr{B}_r(T)=\{f$ 是 T 上的函数，它限制在 T 的每个闭集 L 上，$f|_L$，有一个连续点$\}$。

Theorem A 若 T 是 Polish 空间（或紧空间），则 $\mathscr{B}_1(T)=\mathscr{B}_r(T)$（见 Hausdorff 集论（王建华译）p.288）。

Theorem B 若 T 是 Polish 空间，则 $(\mathscr{B}_1(T),\tau_p)$ 是Angel（天使般的），其中 τ_p 是点点收敛拓扑（注：一个拓扑空间 T 叫做 Angel，如果 T 的每个相对可数紧集A是相对紧的，且若 $x\in\overline{A}$，则存在 $x_n\in A$，使 $x_n\longrightarrow x$）（证明见 B-F-T-1）。

Theorem C 若 T 是 Polish 空间（或紧的），Z 是$C(T)$的集，使

$$\sup_{f\in Z}\sup_{t\in T}|f(t)|<+\infty,$$

则 Z 在 $B_r(T)$ 中相对 τ_p 紧当且仅当 Z 中不存在 l_1 序列（注Z中序列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为 l_1 序列，如果存在 $m,M>0$，使对任 n，

$$m\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^{n}a_if_i(t)\right|\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|a_i|,$$

其中 $(a_i)_{i=1}^{n}$ 为纯量）。（证明参见（Du-1））。

设 $S(1)$ 成立，即 $l_1\not\hookrightarrow X$，因 X 是可分的，故 $(U(X^*),w^*)$ 是 Polish 空间。将 $U(X)$ 的元看作 $C(U(X^*),w^*)$ 中元，因此，$U(X)$ 不含 l_1 序列，由 Theorem C 知 $U(X)$ 在 $\mathscr{B}_r(U(X^*),w^*)$ 中相对 τ_p 紧，由 Goldstine 定理知，

$$U(X^{**})=\overline{U(X)}^{w^*}=\overline{U(X)}^{\tau_p}\subset\mathscr{B}_r(U(X^*),w^*).$$

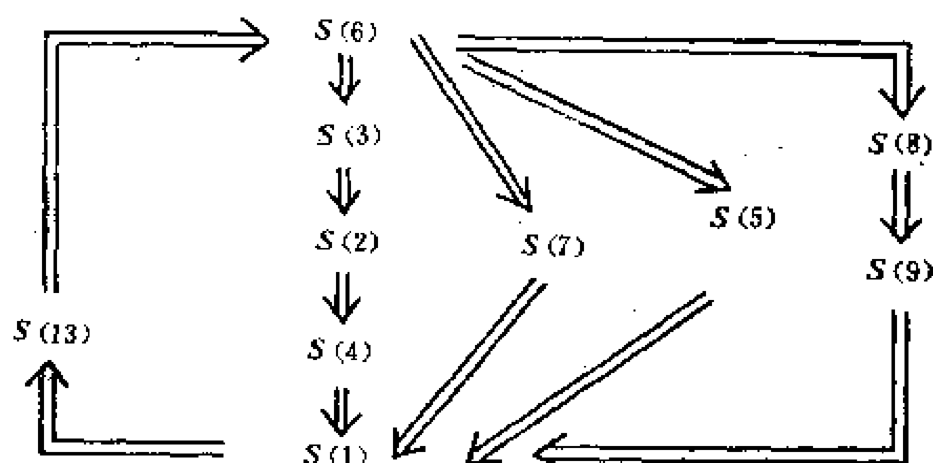
即 $X^{**}\subset\mathscr{B}_r(U(X^*),w^*)$。这就是 $S(13)$。

假设 $S(13)$ 成立，因 X 是可分的，应用 Theorem A 知

$$X^{**}\subset\mathscr{B}_r(U(X^*),w^*)=\mathscr{B}_1(U(X^*),w^*).$$

再应用 Theorem B。$(\mathscr{B}_1(U(X^*), w^*), \tau_p)$ 是 Angel。现设 $A\subset X^{**}$是有界集，则由 Alaoglu定理，A在$(\mathscr{B}_1(U(X^*), w^*)$中是相对 τ_p 紧的，因此，任 $x^{**}\in\overline{A}^{w^*}$，则 $x^{**}|_{U(X^*)}\in\overline{A}^{\tau_p}$，因此，存在 $(x_n^{**})_{n=1}^{\infty}\subset A$，使 $x_n^{**}\xrightarrow{\tau_p}x^{**}$，即$x_n^{**}\xrightarrow{w^*}x^{**}$，从而 $x^{**}\in\overline{A}^{sw^*}$。于是，$\overline{A}^{w^*}=\overline{A}^{sw^*}$，这就是 $S(6)$。证毕。

注　我们的证明路线是



读者也将发现若干推理中并不要求 X 是可分的。但须注意的是这些等价性仅当 X 是可分时成立。□

定理 6.2.26　设 X 是可分的 Banach 空间，则 TFAE：

$S(1)$　$l_1 \not\hookrightarrow X$；

$S(11)$　$C[0,1]\not\approx X/M, \forall M\subset X$。

证明　$S(1)\Longrightarrow S(11)$　若 $l_1\not\hookrightarrow X$，则由定理 6.2.12 知 $C[0,1]^*\not\hookrightarrow X^*$，从而易见 $C[0,1]\not\approx X/M, \forall M\subset X$。证毕。

$S(11)\Longrightarrow S(1)$　我们要用到 Pelezynski 的一个定理 (P-1)：若 W 是可分 Banach 空间，且 $C[0,1]\approx U\subset W$，则 $\exists V\subset U$，使 $V\approx C[0,1]$，且 V 在 W 中可补。

设 $l_1\approx Y\subset X$，由于 $C[0,1]$是可分的，故存在 l_1 到 $C[0,1]$ 的满映射，从而存在 T：$Y\longrightarrow C[0,1]$的满映射。把 $C[0,1]$嵌入到 l_∞ 中，利用 l_∞ 是内射(injective)空间，得到 T 的延拓 $\tilde{T}$：$X\longrightarrow l_\infty$，因为 X 是可分的，故 $\overline{\tilde{T}X}$ 是可分的，且 $C[0,1]\subset\overline{\tilde{T}X}$，应用

Pelczynski 定理，存在 $V \subset C[0,1]$，使 $V \approx C[0,1]$，且 V 在 $\overline{\tilde{T}X}$ 中可补，设 $P: \overline{\tilde{T}X} \longrightarrow V$ 是投影，则 $P \cdot \tilde{T}: X \longrightarrow V$ 是满映射。从而 $X/M \approx C[0,1]$，对某个 $M \subset X$。证毕。

下面讨论 $l_1 \subset\!\to X$（或 $l_1 \not\subset\!\to X$）的一些性质。

定理 6.2.27 若 X 是 Banach 空间，则

(1) $l_1 \not\subset\!\to X^* \Longrightarrow$ (2) X 具有 (ω) 性质

$\Longrightarrow$ (3) $l_1 \not\subset\!\to X$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 若 X 不具 (ω) 性质，则存在 $(x_n^*) \subset S(X^*)$，使 (x_n^*) 没有 w^*Cauchy 子序列，从而 (x_n^*) 更没有 wCauchy 子序列，由 Rosenthal 定理知，$l_1 \subset\!\to X^*$。证毕

(2) $\Longrightarrow$ (3) 若 $l_1 \subset\!\to X$，由于 l_1 不具 (ω) 性质、(ω) 性质关于线性同胚不变性以及具 (ω) 性质空间的空间仍具 (ω) 性质，故 X 不具 (ω) 性质。证毕。

注 由这个定理知，$l_1 \not\subset\!\to X^* \Longrightarrow l_1 \not\subset\!\to X$。但反之不成立（考虑 c_0 和 l_1）然而我们却有下面定理 6.2.28。□

定理 6.6.28 设 X 是实 Banach 空间，$l_1 \subset\!\to X$，如果对 X^* 中任何 w^* 收敛于 0 的序列 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$，有 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \not\approx (e_n) l_1$，则 $l_1 \subset\!\to X_*$。

为了证明这个定理，我们首先引入几个记号及证明一个引理。

定义 6.2.12 设 Ω 是一个集，Ω 的非空子集的序列 $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为 Ω 的子集的一个树，如果对每个 n，Ω_{1n} 和 Ω_{2n+1} 是 Ω_n 的不相交的子集。

引理 6.2.29 设 Ω 是一个集，$(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Ω 的集的一个树，又 B 是 $l_\infty(\Omega)$ 的一个有界集，$\delta > 0$。假设存在 B 中一个序列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$，使得当 $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$ 时，

$$(-1)^k b_n(\omega) \geqslant \delta, \quad \forall \omega \in \Omega_k,$$

（这样的一个序列叫 Rademacher 型序列），则 $(b)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{l_1}$。

证明 任取实数 $t_1, \cdots, t_n$，则

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j b_j\right\|_\infty \leqslant \sup\{\|b\|_\infty;\ b\in B\}\cdot\sum_{j=1}^{n}|t_j|.$$

为了证明

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j b_j\right\|_\infty \geqslant \delta\sum_{j=1}^{n}|t_j|,$$

我们只须适当选择 $\omega\in\Omega_i$。例如：

$$\|t_1b_1\|_\infty = |t|\cdot\|b_1\|_\infty \geqslant |t|\delta$$

（任取 $\omega\in\Omega_1$）。对 $\|t_1b_1+t_2b_2\|_\infty$，考虑两种情况，

(a) t_1 与 t_2 同号，则取 $\omega_3\in\Omega_3$，有

$$\|t_1b_1+t_2b_2\|_\infty \geqslant |t_1b_1(\omega_3)+t_2b_2(\omega_3)| \geqslant \delta\sum_{i=1}^{2}|t_i|;$$

(b) t_1 与 t_2 异号，取 $\omega_2\in\Omega_2$，

则

$$\|t_1b_1+t_2b_2\| \geqslant |t_1b_1(\omega_2)+t_2b_2(\omega_2)| \geqslant \delta\sum_{i=1}^{2}|t_i|.$$

依次类推（由于 $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ 及 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 的构造知，对任何 n，选取 ω 总是可能的）得

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j b_j\right\|_\infty \geqslant \delta\sum_{j=1}^{n}|t_j|.$$

即 $(b_n)_{n=1}^{\infty}\approx(e_n)_{l_1}$。证毕。

定理 6.2.28的证明　令

$$\mathscr{A}=\{(y_n^*)\subset U(X^*);\ (y_n^*)\approx(e_n)_{l_1}\},$$

由于 $l_1 \subset\!\!\!\to X^*$，故 $\mathscr{A}\neq\varnothing$，

对每个 $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{A}$，定义

$$\delta(y_n^*)=\sup_{\|x\|=1}\overline{\lim_{n}}\,|y_n^*(x)|.$$

由假设，由 $(y_n^*)\in\mathscr{A}$ 时，$y_n^*\xrightarrow{w^*}0$，故 $\delta(y_n^*)>0$，$\forall(y_n^*)\in\mathscr{A}$。

为了叙述方便，约定若 $z_n^*=\sum_{i\in A_n}a_iy_i^*$，其中 $\sum_{i\in A_n}|a_i|=1$，且 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 为两两不相交的自然数有限集的序列，$A_n<A_{n+1}$（即 A_n 在 A_{n+1} 前），称 (z_n^*) 为 (y_n^*) 的正规化 l_1-block。显然，对 $(y_n^*)\in\mathscr{A}$，(y_n^*) 的正规化 l_1-block (z_n^*) 有 $(z_n^*)\approx(e_n)_{l_1}$，且 $\delta(z_n^*)\leqslant\delta(y_n^*)$。

令 $\varepsilon(y_n^*)=\inf\{\delta(z_n^*);\ (z_n^*)$为$(y_n^*)$的正规化 l_1-block$\}$，显然，若(z_n^*)是(y_n^*)的正规化 l_1-block，则

$$\varepsilon(z_n^*)\geqslant\varepsilon(y_n^*).$$

(1) 首先证明：若$(v_n^*)\in\mathscr{A}$，则存在(v_n^*)的正规化 l_1-block (y_n^*)，使 $\delta(y_n^*)=\delta(z_n^*)$，$\forall(y_n^*)$的正规化 l_1-block(z_n^*)。

事实上，取$(y_{n,1}^*)$是(v_n^*)的正规化 l_1-block，使

$$\delta(y_{n,1}^*)\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon(v_n^*).$$

取$(y_{n,2}^*)$是$(y_{n,1}^*)$的正规化 l_1-bolck，使

$$\delta(y_{n,2}^*)\leqslant\frac{5}{4}\varepsilon(y_{n,1}^*),$$

继续下去，令 $y_n^*=y_{n,n}^*$（对角线元素），则(y_n^*) 是(v_n^*)的正规化 l_1-block。且

$$\delta(y_n^*)\leqslant\delta(y_{n,k}^*),\varepsilon(y_{n,k}^*)\leqslant\varepsilon(y_n^*),\forall k.$$

故

$$\delta(y_n^*)\leqslant\lim_k\delta(y_{n,k}^*)\leqslant\varliminf\varepsilon(y_{n,k}^*)\leqslant\varepsilon(y_n^*)\leqslant\delta(y_n^*)$$

即得 $\delta(y_n^*)=\varepsilon(y_n^*)$，所以$(y_n^*)$即为所求。

(2) 根据(1)，我们可取$(y_n^*)\subset U(X^*)$满足：

(a) $(y_n^*)\approx(e_n)_{l_1}$；

(b) $y_n^*\overset{w^*}{\nrightarrow}0$；

(c) $\delta(y_n^*)=\varepsilon(y_n^*)$；

(d) $\delta=\delta(y_n^*)>0$。

任给 $\varepsilon>0$，则存在 $x_1\in S(X)$和正整数 N 的无穷子集 N_1，使

$$y_n^*(x_1)<-\delta+\varepsilon,\forall n\in N_1.$$

选 ε'，$0<\varepsilon'<\dfrac{\varepsilon}{3}$，将 N_1 分成正整数的两个增加无限子集

$$(m_k),(n_k),(m_1<n_1<m_2<n_2<\cdots),$$

则

$$\left(\frac{1}{2}(y_{n_k}^*-y_{m_k}^*)\right)$$

是(y_n^*)的正规化 l_1-block。从而

$$\left(\frac{1}{2}(y_{n_k}^* - y_{m_k}^*)\right) \approx (e_n)_{l_1}.$$

由假设

$$\frac{1}{2}(y_{n_k}^* - y_{m_k}^*) \overset{w^*}{\not\rightarrow} 0.$$

故存在 $x_2 \in S(X)$ 及自然数的无限子集 L，使

$$\frac{1}{2}(y_{n_k}^* - y_{m_k}^*)(x_2) > \delta - \varepsilon', \forall k \in L, \tag{6.20}$$

当然，$(y_{n_k}^*)$与$(y_{m_k}^*)$都是(y_n^*)的正规化 l_1-block，故除了有限多个 k 外，必有

$$|y_{n_k}^*(x_2)| < \delta + \varepsilon', |y_{m_k}^*(x_2)| < \delta + \varepsilon'. \tag{6.21}$$

对于满足(6.20)和(6.21)的共同 k，有

$$y_{n_k}^*(x_2) > \delta - 3\varepsilon',$$
$$y_{m_k}^*(x_2) < -\delta + 3\varepsilon'.$$

令

$$N_2 = \{n_k; y_{n_k}^*(x_2) > \delta - \varepsilon\},$$
$$N_3 = \{m_k; y_{m_k}^*(x_2) < -\delta + \varepsilon\},$$

因为 $3\varepsilon' < \varepsilon$，故 $\delta - 3\varepsilon' > \delta - \varepsilon$。从而，$N_1, N_2$ 是自然数的不相交子集，$N_2 \cup N_3 \subset N_1$。

令 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{7}$，同样方法可将 N_2 分解成不相交的无限子集

$$((n_k(1)), (n_k(2))),$$

N_3 分解成不相交无限子集$((m_k(1)), (m_k(2)))$。

显然，

$$\frac{1}{4}(y_{n_k(1)}^* - y_{n_k(2)}^* + y_{m_k(1)}^* - y_{m_k(2)}^*)$$

是(y_n^*)的正规化 l_1-block（它们等价于$(e_n)_{l_1}$，且$\overset{w^*}{\not\rightarrow} 0$），故存在 $x_3 \in S(X)$，使有无限多个 k，有

$$\frac{1}{4}(y^*_{n_k(1)} - y^*_{n_k(2)} + y^*_{m_k(1)} - y^*_{m_k(2)})(x_3) > \delta - \varepsilon', \qquad (6.22)$$

当然，

$$(y^*_{n_k(1)}), (y^*_{n_k(2)}), (y^*_{m_k(1)}), (y^*_{m_k(2)})$$

是(y^*_n)的正规化 l_1-block，故除有限多个 k 外，有

$$|y^*_{n_k(1)}(x_3)|, |y^*_{n_k(2)}(x_3)|, |y^*_{m_k(1)}(x_3)|, |y^*_{m_k(2)}(x_3)| < \delta + \varepsilon'. \qquad (6.23)$$

对于满足(6.22)，(6.23)的k，有

$$y^*_{n_k(1)}(x_3), y^*_{m_k(1)}(x_3) > \delta - 7\varepsilon',$$

$$y^*_{n_k(2)}(x_3), y^*_{m_k(2)}(x_3) < -\delta + 7\varepsilon'.$$

令

$$N_4 = \{n_k(1);\ y^*_{n_k(1)}(x_3) > \delta - \varepsilon\},$$

$$N_5 = \{n_k(2);\ y^*_{n_k(2)}(x_3) < -\delta + \varepsilon\},$$

$$N_6 = \{m_k(1);\ y^*_{m_k(1)}(x_3) > \delta - \varepsilon\},$$

$$N_7 = \{m_k(2);\ y^*_{m_k(2)}(x_3) < -\delta + \varepsilon\},$$

则 N_4、N_5 是 N_2 的不相交无限子集，N_6、N_7 是 N_3 的不相交无限子集$\left(因\ \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{7}\right)$.

继续下去，令 $\Omega_n = \{y^*_k; k \in N_n\}$，则$(\Omega_n)$是 $U(X^*)$ 的一个树样集，$x_n \in S(X)$，且若 $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$，则

$$(-1)^k x_n(y^*) > \delta - \varepsilon, \quad \forall y^* \in \Omega_k.$$

将 x_n 看作 $l_\infty(U(X^*))$的元，

由引理 6.2.29 知，$(x_n) \approx (e_n)_{l_1}$，从而 $l_1 \subset\!\!\to X$。证毕。

定理 6.2.30 若 X 是一个无限维 Banach 空间，则

$$U(X^*) = \overline{S(X^*)}^{w^*}.$$

证明 对复 Banach 空间 X，考虑它的实化 X_R（即将它看作实 Banach 空间）。故不妨假设 X 为实无限维 Banach 空间。

首先证明存在$(x^*_n) \subset S(X^*)$，使 $x^*_n \xrightarrow{w^*} 0$。反证，若对任何 $x^*_n \xrightarrow{w^*} 0$，有 $\|x^*_n\| \longrightarrow 0$。

考虑两种情况：(a)$l_1 \subset\!\to X^*$，(b)$l_1 \subset\!\not\to X^*$。

(a) $l_1 \subset\!\to X^*$ 是不可能的。事实上若 $l_1 \subset\!\to X^*$，由假设知任何 w^*收敛于 0 的序列(x_n^*)，有$(x_n^*) \not\sim (e_n)_{l_1}$，应用定理 6.2.28，有 $l_1 \subset\!\to X$。下面将导出 $\exists (y_n^*) \subset X^*$，使 $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$，但$\|y_n^*\| \xrightarrow{w^*}$ e 与假设矛盾！

事实上，令 $i: l_1 \longrightarrow c_0$ 是恒等映象。$R: l_1 \longrightarrow L_\infty$，$Re_n = r_n(t)$ (第 n 个 Rademacher 函数)（将它线性延拓为有界线性算子）。则易见 R 是 l_1 到 L_∞ 内的线性同胚（对任 $a_1, \cdots, a_n$，选 $t_0 \in [0,1]$，使 $r_i(t_0) = \mathrm{sgn}\, a_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_\infty \geqslant \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(t_0) \right| = \sum_{i=1}^n |a_i| \Big).$$

令

$$T: L_\infty \longrightarrow c_0, \quad Tf = \left(\int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right)_{n=1}^\infty,$$

则 $i = TR$。由于 L_∞ 为 injective 空间，故存在 R 的延拓 $\tilde{R}: X \longrightarrow L_\infty$，于是 $T\tilde{R}$: $X \longrightarrow c_0$ 为有界线性算子，$(T\tilde{R})^*$: $l_1 \longrightarrow X^*$。令 $y_n^* = (T\tilde{R})^* e_n$，其中$(e_n)_{n=1}^\infty$ 为 l_1 的自然基。则 $y_n^*(x) = \langle T\tilde{R}(x), e_n \rangle \longrightarrow 0, \forall x \in X$，即 $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$，但

$$\|y_n^*\| \geqslant \|y_n^*|_{l_1}\| \geqslant |y_n^*(e_n)| = 1.$$

对任何 $x^* \in X^*$，$\|x^*\| < 1$。取 α_n，使 $\|\alpha_n x_n^* + x^*\| = 1$，其中 $\|x_n^*\| = 1$，$x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$，则 $|\alpha_n| = \|\alpha_n x_n^*\| \leqslant \|\alpha_n x_n^* + x^*\| + \|x^*\| < 2$，故 (α_n)有存列 $\alpha_{n_i} \longrightarrow \alpha$，从而 $\alpha_{n_i} x_{n_i}^* \xrightarrow{w^*} 0$，且 $x^* + \alpha_{n_i} x_{n_i}^* \xrightarrow{w^*} x^*$，注意到$\|x^* + \alpha_{n_i} x_{n_i}^*\| = 1$，即得$x^* \in \overline{S(X^*)}^{w^*}$。证毕。

(b) $l \not\subset\!\to X^*$ 也是不可能的，因为若$l_1 \not\subset\!\to X^*$，则(x_n^*)有子列$(x_{n_i}^*)$是 w Canchy 的，从而更为 w^* Canchy 的，由$(U(X^*), w^*)$是紧的，知 $x_{n_i}^* \xrightarrow{w^*} x^*$，对某个 x^*，$x^* \in U(X^*)$；从而 $x_{n_i}^* - x^* \xrightarrow{w^*} 0$，由假设，$\|x_{n_i}^* - x^*\| \longrightarrow 0$。因此 $\dim X < +\infty$ 矛盾！证毕。

定理 6.2.31 对任何无限维 Banach 空间，

$$\overline{S(X)}^{sw}=U(X)\Longleftrightarrow X \text{不是 Schur 空间。}$$

证明　若 X 是 Schur 空间，则 $\overline{S(X)}^{sw}=S(X)\neq U(X)$。反之，若 X 不是 Schur 空间，则存在 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使得 $x_n\xrightarrow{w}0$，但 $\inf\limits_n\|x_n-x\|>0$，故有子列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$，使得 $\|x_{n_i}-x\|\longrightarrow a$，从而令

$$y_i=\frac{x_{n_i}-x}{\|x_{n_i}-x\|},$$

有 $y_i\xrightarrow{w}0$，但 $\|y_i\|=1$。由此容易得到（仿定理 6.2.30 证明）$\overline{S(X)}^{sw}=U(X)$。证毕。

下面对可分空间X，给出 $l_1\subset\!\!\to X^*$ 的特征，我们须要 w^*基序列概念。

定义 6.2.13　$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset X^*$ 称为w^*基序列，如果存在 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $x_n^*(x_m)=\delta_m^n$，且对任何$x^*\in\overline{\text{span}}^*(x_n^*)$有

$$x^*=w^*\lim_n\sum_{i=1}^{n}x^*(x_i)x_i^*.$$

注　当$\overline{\text{span}}^*(x_n^*)=X^*$时，称$(x_n^*)$为 X^* 的 w^* 基。容易看到，当$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的基时，相应的坐标泛函 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 为 X^* 的 w^* 基，□

引理 6.2.32　$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$ 是 w^* 基序列，当且仅当存在$Y=X/^{\perp}([x_i^*]_{i=1}^{\infty})$ 的一个基 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$，使得 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 的相应坐标泛函 $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 满足 $Q^*y_n^*=x_n^*$，其中 Q 是 $X\longrightarrow Y$ 的商映象。

证明　"$\Longrightarrow$" 若$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 w^* 基序列，由定义，存在$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$，使 $x_n^*(x_m)=\delta_m^n$，且对任 $x^*\in\overline{\text{span}}^*\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$，有

$$x^*=w^*\lim_n\sum_{i=1}^{n}x^*(x_n)x_n^*.$$

令 Q：$X\longrightarrow Y=X/^{\perp}([x_i^*]_{i=1}^{\infty})$是商映象。则

Q^*：$Y^*\longrightarrow\overline{\text{span}}^*(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 是线性同距，且 w^*-w^* 连续

令

$$y_n^*=(Q^*)^{-1}(x_n^*),\ y_n=Qx_n,$$

则

$$y_n^*(y_m)=(Q^*)^{-1}(x_n^*)(Qx_m)=x_n^*(x_m)=\delta_m^n.$$

任何 $y^*\in Y^*$,

$$Q^*y^*=w^*\ \lim_n\sum_{i=1}^n Q^*y^*(x_n)x_n^*.$$

由于 Q^* 是 w^*—w^* 连续和线性等距，故

$$y^*=w^*\ \lim_n\sum_{i=1}^n y^*(y_n)y_n^*,$$

从而 $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ 是 Y^* 的 w^* 基。由于

$$y^*(y)=\sum_{i=1}^\infty y^*(y_i)y_i^*(y),\forall y^*\in Y,\ \ y\in Y. \qquad (6.24)$$

令

$$P_n:\ Y\longrightarrow[y_i]_{i=1}^n,\ P_ny=\sum_{i=1}^n y_i^*(y)y_i,\ \ \forall y\in Y.$$

根据(6.24)，两次应用 Banach-Steinbaus 定理知，

$$\sup_n\|P_n\|<+\infty.$$

且我们有

$$Y=[y_n]_{n=1}^\infty.$$

事实上，否则存在 $y^*\in Y^*\setminus\{0\}$，使 $y^*(y_n)=0$, $\forall n$, 由(6.24)知，$y^*(y)=0,\forall y\in Y$，这与 $y^*\neq 0$ 矛盾。因此我们得到 $Y=[y_n]_{n=1}^\infty$，即$\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Y 的基。证毕。

"$\Longleftarrow$" 若$(y_n)_{n=1}^\infty$ 是 $Y=X/^{\perp}([x_n^*]_{n=1}^\infty)$ 的基，且相应坐标泛函$(y_n^*)_{n=1}^\infty$，满足 $Q^*y_n^*=x_n^*$，其中 Q: $X\longrightarrow Y$ 是商映象。由定义 6.2.13 的注知，$(y_n^*)_{n=1}^\infty$ 是 Y^* 的 w^* 基。由于 Q^*: $Y^*\longrightarrow \overline{\text{span}}^*(x_n^*)_{n=1}^\infty$ 是 w^*—w^* 连续且线性等距。则 $x_n^*=Q^*y_n^*$ 为 X^* 的 w^*基序列。事实上，

选 $x_n\in X$，使 $Qx_n=y_n$，则

$$x_n^*(x_m)=Q^*y_n^*(x_m)=y_n^*(y_m)=\delta_m^n,$$

且任何 $x^*\in\overline{\text{span}}^*(x_n^*)_{n=1}^\infty$，存在 $y^*\in Y^*$，使 $Q^*y^*=x^*$。由于

$$y^*=w^*\lim_n\sum_{i=1}^n y^*(y_i)y_i^*,$$

故

$$x^* = w^*\lim_n \sum_{i=1}^n y^*(y_i)x_i^* = w^* \lim_n \sum_{i=1}^n x^*(x_i)x_i^*.$$

即$(x_n^*)_{n=1}^\infty$ 是w^* 基序列。证毕。

引理 6.2.33 设 $B\subset X^*$，$\dim B<+\infty, \varepsilon>0$，则存在 $S(X)$ 的有限集 F，使得对任何 $f\in B^*$，$\|f\|=1$，有 $x\in F$，使

$$|f(x^*)-x^*(x)|\leqslant\varepsilon\|x^*\|,\quad \forall x^*\in B.$$

证明 取 B^* 的有限$\frac{\varepsilon}{4}$网$(f_1,\cdots,f_n)$，取 $S(B)$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{4}$网 $(x_1^*,\cdots,x_m^*)$，将 f_i 延拓为 X^{**} 元，仍记为 f_i。由 Goldstin 定理，存在 $x_i\in S(X)$，使

$$\max_{1\leq j\leq m}|f_i(x_j^*)-x_j^*(x_i)|<\frac{\varepsilon}{4}, i=1,\cdots,n.$$

令 $F=\{x_1,\cdots,x_n\}$，容易看到 F 即所求。证毕。

定理 6.2.34 每个可分 Banach 空间 X，存在$(x_n^*)_{n=1}^\infty\subset X^*$，使$(x_n^*)_{n=1}^\infty$ 是 w^* 基序列，从而 X 存在具有基的无限维商空间。

证明 由于 X 是可分的，故$(U(X^*), w^*)$是紧可度量化空间，所以，存在$(x_n^*)_{n=1}^\infty\subset S(X)$，$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$（注意这里也可不用可分性假设由定理 6.2.30 得到，但下面证明中必须有可分性假设）。

我们将证明$(x_n^*)_{n=1}^\infty$ 有子序列是 w^* 基序列。

令$(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ 是一个数列，$0<\varepsilon_n<1$，且$\sum_{n=1}^\infty\varepsilon_n<+\infty$。

由于 X 是可分的，$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$，及应用引理 6.2.33，可以归纳构造正整数的序列 $k_1<k_2<\cdots$ 和 $S(X)$中有限集的序列 $F_1\subset F_2\subset\cdots$，使

(1) $X=\overline{\text{span}}\left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right)$；

(2) 对每个 $f\in([x_{k_i}^*]_{i=1}^n)^*$，$\|f\|=1$，在 $x\in F_n$，使得

$$|f(x^*)-x^*(x)|<\frac{\varepsilon_n}{3}\|x^*\|, \forall x^*\in[x_{k_i}^*]_{i=1}^n.$$

(3) $|x^*_{k_{n+1}}(x)|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{3}$, $\forall x\in F_n$.

下面证明$(x^*_{k_i})_{n=1}^{\infty}$是 w^* 基序列。

(a) $(x^*_{k_n})_{n=1}^{\infty}$是基序列。事实上，

任 $y^*\in[x^*_{k_i}]_{i=1}^{n}$, $\|y^*\|=1$ 及任何 λ,

当 $|\lambda|\geqslant 2$时，

$$\|y^*+\lambda x^*_{k_{n+1}}\|\geqslant\|\lambda x^*_{k_{n+1}}\|-\|y^*\|\geqslant 1=\|y^*\|.$$

当 $|\lambda|<2$ 时，选 $f\in([x^*_{k_i}]_{i=1}^{n})^*$, $\|f\|=1$, 使 $f(y^*)=1$, 由条件(2)，选 $x_0\in F_n$, 使

$$|f(y^*)-y^*(x_0)|<\frac{\varepsilon_n}{3},$$

则

$$\begin{aligned}\|y^*+\lambda x^*_{k_{n+1}}\|&\geqslant|y^*(x_0)+\lambda x^*_{k_{n+1}}(x_0)|\\&\geqslant|y^*(x_0)-|\lambda|\cdot|x^*_{k_{n+1}}(x_0)|\\&\geqslant|f(y^*)|-|f(y^*)-y^*(x_0)|-\frac{2\varepsilon_n}{3}.\\&\geqslant 1-\frac{\varepsilon_n}{3}-\frac{2\varepsilon_n}{3}=(1-\varepsilon_n)\|y^*\|.\end{aligned}$$

从而对任何 $y^*\in[x_{k_i}]_{i=1}^{n}$, 任何 λ, 有

$$\|y^*\|\leqslant(1-\varepsilon_n)^{-1}\|y^*+\lambda x^*_{k_{n+1}}\|.$$

由基序列判别准则知，$(x^*_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ 是基序列，且

$$\|P_n\|\leqslant\prod_{j=n}^{\infty}(1-\varepsilon_j)^{-1}\longrightarrow 1,\text{当 } n\to\infty\text{时},$$

基中 P_n: $[x_{k_i}]_{i=1}^{\infty}\longrightarrow[x_{k_i}]_{i=1}^{n}$ 为自然投影。

(b) 令 $(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset([x^*_{k_n}]_{n=1}^{\infty})^*$是$(x^*_{k_n})_{n=1}^{\infty}$的相应坐标泛函。令 T: $X\longrightarrow([x^*_{k_n}]_{n=1}^{\infty})^*$, $Tx(x^*)=x^*(x)$, $\forall x\in X$, $x^*\in[x^*_{k_n}]_{n=1}^{\infty}$. 显然 $\|T\|\leqslant 1$.

下面证明 $T: X\longrightarrow[y_n]_{n=1}^{\infty}$ 是满映射。

首先证明 $TX\subset[y_n]_{n=1}^{\infty}$。事实上，因为若 $x\in F_n$, 对某个 n, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x^*_{k_i}(x)|<+\infty,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}^*(x) y_i < +\infty.$$

对任何 $x^* \in [x_{k_n}^*]_{n=1}^{\infty}$，

$$Tx(x^*) = x^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^*(y_i) x_{k_i}^*(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}^*(x) y_i\right)(x^*),$$

故

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}^*(x) y_i \in [y_n]_{n=1}^{\infty},$$

由于 $X = \overline{\text{span}} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，故 $TX \subset [y_n]_{n=1}^{\infty}$

为了证明 T 是满映射，我们先证明：

对每个 $y \in \text{span}\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\|y\| = 1$，$\varepsilon > 0$，存在 $x \in S(X)$，使 $\|Tx - y\| < \varepsilon$。 (6.25)

(6.25) 的证明：假设 $y \in \text{span}\ \{y_i\}_{i=1}^{n}$，$\|y\| = 1$，$\varepsilon > 0$，不妨考虑 n 充分大，使 $\varepsilon > \sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i$，且当 $m \geqslant n$ 时，$\|P_m\| < 1 + \varepsilon$。

为了记号方便，对 $u \in \text{span}\{y_i\}_{i=1}^{n}$，用 $\|u\|_1$ 表示 $\|u|_{[x_{k_i}]_{i=1}^{n}}\|$，这时，容易看到，

$$\|u\|_1 \leqslant \|u\| \leqslant \|P_n\| \cdot \|u\|_1 \leqslant (1+\varepsilon)\|u\|_1. \tag{6.26}$$

令 $z = \dfrac{y}{\|y\|_1}$，由条件(2)，选 $x_0 \in F_n$，使

$$|z(x^*) - x^*(x_0)| < \frac{\varepsilon_n}{3}\|x^*\|, \quad \forall x^* \in [x_{k_i}^*]_{i=1}^{n}.$$

因此，

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}^*(x_0) y_i - z\right\|_1 < \frac{\varepsilon_n}{3} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\left(x^*(x_0) = Tx_0(x_0(x^*)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Tx_0(x_{k_i}^*) y_i(x^*) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}^*(x_0) y_i\right)(x^*)$，$\forall x^* \in [x_{k_i}^*]_{i=1}^{n}$)。

因此，由(6.26)，

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}^*(x_0) y_i - z\right\| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

由于 $\|y_i\|=\|P_i-P_{i-1}\|\leqslant 4$, $\forall i$，由条件(3)，有

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} x_{k_i}^*(x_0)\, y_i\right\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_{k_i}^*(x_0)|\cdot\|y_i\| \leqslant \frac{4}{3}\varepsilon.$$

又由(6.26)知 $\|y-z\|\leqslant 2\varepsilon$。所以，

$$\begin{aligned}\|Tx_0-y\| &\leqslant \|Tx_0-z\|+\|y-z\| \\ &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}^*(x_0)y_i - z\right\| + 2\varepsilon. \\ &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}^*(x_0)y_i - z\right\| + \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} x_{k_i}^*(x_0)\, y_i\right\| + 2\varepsilon \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{4\varepsilon}{3}+2\varepsilon \leqslant 4\varepsilon.\end{aligned}$$

即(6.25)成立。

利用开映象定理的论证，根据(6.25)得到 T 是满映象。事实上，任取 $y\in\overline{\operatorname{span}}\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|y\|=1$, $\varepsilon>0$，选 $y_0\in \operatorname{span}\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|y_0\|=1$，使 $\|y-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$，由(6.25)，再选取 $x_0\in S(X)$，使

$$\|Tx_0-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

故

$$\|Tx_0-y\|\leqslant\|Tx_0-y_0\|+\|y_0-y\|<\varepsilon.$$

这表明(6.25)对

$$y\in\overline{\operatorname{span}}\{y_n\}_{n=1}^{\infty},\ \|y\|=1.$$

成立。设

$$y\in\overline{\operatorname{span}}\{y_n\}_{n=1}^{\infty},\ \|y\|=1,\ 0<\varepsilon<1,$$

选 $x_1\in S(X)$，使 $\|Tx_1-y\|<\varepsilon$。

因

$$\frac{y-Tx_1}{\|y-Tx_1\|}\in\overline{\operatorname{span}}\{y_n\}_{n=1}^{\infty},$$

且

$$\left\|\frac{y-Tx_1}{\|y-Tx_1\|}\right\|=1,$$

可选 $x_2\in S(X)$，使

$$\left\|Tx_2-\frac{y-Tx_1}{\|y-Tx\|}\right\|<\varepsilon.$$

则

$$\|y-Tx_1-T\|y-Tx_1\|x_2\|<\varepsilon^2,$$

继续下去，则得 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，使

$$y=Tx_1+T\|y-Tx_1\|x_2+T\|y-Tx_1-T\|y-Tx_1\|x_2\|x_3+\cdots$$

由此，得 $y\in TX$，所以立即得到 $[y_n]_{n=1}^{\infty}=TX$。即 T 是满映象。

(c) 令 $\tilde{T}$: $X/\ker(T)\longrightarrow[y_n]_{n=1}^{\infty}$，则 $\tilde{T}$ 是 1–1 的满映象，由共鸣定理得 $\tilde{T}$ 是线性同胚。注意到 $\mathrm{Ker}(T)={}^{\perp}([x_{k_n}^*]_{n=1}^{\infty})$，我们得到 $\{(\tilde{T})^{-1}(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $Y=X/{}^{\perp}([x_{k_n}^*]_{n=1}^{\infty})$ 的基，令相应的坐标泛函是 $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$，我们有 $Q^*y_n^*=x_{k_n}^*$，其中 Q 是 $X\longrightarrow Y$ 的商映象。事实上，首先注意到，

$$\tilde{Q}x=Tx,\quad \forall x\in X.$$

故

$$\begin{aligned}Q^*y_n^*(x)&=y_n^*(Qx)=y_n^*((\tilde{T})^{-1}(\tilde{T}Qx))\\&=y_n^*((\tilde{T})^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{T}Qx(x_{k_j}^*)y_j)\\&=y_n^*\Big(\sum_{j=1}^{\infty}Tx(x_{k_j}^*)(\tilde{T})^{-1}y_j\Big)\\&=Tx(x_{k_n}^*)=x_{k_n}^*(x).\quad\forall x\in X,\end{aligned}$$

故 $Q^*y_n^*=x_{k_n}^*$. $\forall n$. 由引理 6.2.32，即得所要结论。证毕。

注　从定理证明看到，若 $\|x_n^*\|=1$，$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$ （在 X 可分时），$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 有子序列 $(x_{n_i}^*)_{i=1}^{\infty}$ 是 w^* 基序列，且 $X/{}^{\perp}[x_{n_i}^*]_{i=1}^{\infty})$ 有基。□

定理 6.2.35　若 X 是可分的 Banach 空间，则

$$l_1\not\hookrightarrow X^*\Longleftrightarrow c_0\not\approx X/M,\ \forall M\subset X.$$

证明　若"$\Longrightarrow$"若 $c_0\approx X/M$，对某个 $M\subset X$，则 $l_1\approx(X/M)^*\cong M^{\perp}\subset X^*$，即 $l_1\hookrightarrow X^*$。证毕。

"$\Longleftarrow$" 若 $l_1 \subset\!\!\to X^*$，设 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X$，使 $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{l_1}$，由于 X 是可分的，$(U(X^*), w^*)$ 是紧可度量化的。故存在 (x_n^*) 的子列 $(x_{n_k}^*)$，使 $(x_{n_k}^*)$ 是 w^* 收敛的。令 $y_{n_k}^* = x_{n_{k+1}}^* - x_{n_k}^*$，则 $y_k^* \xrightarrow{w^*} 0$，且 $(y_k^*) \approx (e_n)_{l_1}$。由定理 6.2.34 注知 (y_k^*) 有子列 $(y_{k_n}^*)$ 是 w^* 基序列，且 $Y = X/^{\perp}([y_{k_n}^*]_{n=1}^{\infty})$ 具有基 (z_n)，且相应的坐标泛函 (z_n^*) 满足 $Q^* z_n^* = y_{k_n}^*$，其中 $Q: X \longrightarrow Y$ 是商映象。

我们看到 $(z_n) \approx (e_n)_{c_0}$。事实上，因 Q^* 有有界逆，故 $(z_n^*) \approx (y_{k_n}^*) \approx (e_n)_{l_1}$。利用共轭论证即得 $(z_n) \approx (e_n)_{c_0}$，为了便于读者了解，我们详细写出如下：

设

$$m\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i^* \right\| \leqslant M \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|, \quad \forall (a_i) \in l_1.$$

对任

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*(z) z_i \in Y,$$

令 $\|z^*\| = 1$，使

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*(z) z_i \right\| = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*(z) z^*(z_i),$$

注意到 $(z_n^*) \approx (e_n)_{l_1}$，故 (z_n^*) 是有界完备基序列，则任何

$$z^* = \sum_{j=1}^{\infty} z^*(z_n) z_n^*$$

（证明见下面注）。故

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*(z) z_i \right\| &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |z_i^*(z) z^*(z_i)| \\
&\leqslant (\sup_i |z_i^*(z)|) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |z^*(z_i)| \\
&\leqslant m^{-1} (\sup_i |z_i^*(z)|) \left\| \sum_{i=1}^{\infty} z^*(z_i) z_i^* \right\| \\
&\leqslant m^{-1} (\sup_i |z_i^*(z)|).
\end{aligned}$$

由此立即得到 $(z_n) \approx (e_n)_{c_0}$。即 $X/^{\perp}([y_{k_n}^*]_{n=1}^{\infty}) \approx c_0$。证毕。

注　我们证明若 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的基，(x_n^*) 为相应坐标泛函，如

果(x_n^*)是有界完备的，则(x_n^*)是 X^* 的基。事实上只须证明

$$\overline{\text{span}}(x_n^*)_{n=1}^{\infty}=X^*\text{（已知}X^*=\overline{\text{span}}(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\text{）。}$$

任取 $x^*\in X^*$，考虑

$$y_n^*=\sum_{i=1}^{n}x^*(x_i)x_i^*,$$

对任何

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^*(x)x_i,$$

有

$$\begin{aligned}y_n^*(x)&=\sum_{i=1}^{n}x^*(x_i)x_i^*\left(\sum_{j=1}^{\infty}x_j^*(x)x_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}x^*(x_i)x_i^*(x)=x^*\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^*(x)x_i\right)\\&=x^*(P_nx)。\end{aligned}$$

其中 P_n 是 $X\longrightarrow[x_i]_{i=1}^{n}$ 的自然投影。故

$$\|y_n^*\|\leqslant\|x^*\|\cdot K,$$

其中 K 为$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的基常数。所以

$$\sup_n\|y_n^*\|\leqslant K\cdot\|x^*\|,$$

由$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界完备基序列，故

$$\sum_{i=1}^{\infty}x^*(x_i)x_i^*=y^*\in\overline{\text{span}}\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}。$$

但 $x^*(x_i)=y^*(x_i)$, $\forall i$, $\therefore y^*=x^*$，故

$$x^*\in\overline{\text{span}}\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}。$$

因此，$\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X^* 的基。□

读者容易证明如下结论：

(A)：若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$为基序列，$(x_n^*)\subset[x_n]^*$ 是相应的坐标泛函，则$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是收缩基序列$\Longleftrightarrow(x_n^*)$是$[x_n]^*$ 中有界完备基。

(A-1) 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$为基，(x_n^*)为相应坐标泛函，则

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是收缩基$\Longleftrightarrow(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 的有界完备基。

$\Longleftrightarrow(x_n^*)$是 X^* 的基。

(B) 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是X的基序列，$(x_n^*)\subset[x_n]^*$ 是相应坐标泛函，

则$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是有界完备基序列$\Longleftrightarrow(x_n^*)$是$[x_n]^*$中收缩基序列。

(B-1) 若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是X的基，(x_n^*)为相应坐标泛函，则$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是有界完备基$\Longleftrightarrow(x_n^*)$是$X^*$中收缩基序列。□

定理 6.2.36 若X是实 Banach 空间，$l_1\subset_{\to}X^*$，则

(a) 或者$c_0\approx X/M$，对某个$M\subset X$；

(c) 或者$l_1\subset_{\to}X$。

证明 若$l_1\subset_{\to}X^*$，且$l_1\subset_{\to}X$，则由定理 6.2.28 知，存在$(x_n^*)\subset X^*$，使$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$，且$(x_n^*)\approx(e_n)_{l_1}$，又由(H-J-1)知，$c_0\approx X/M$，对某个$M\subset X$。证毕。

注 (H-J-1)中得到：若存在$(x_n^*)\subset X^*$，使$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$，且$(x_n^*)\approx(e_n)_{l_1}$，则$c_0\approx X/M$，对某个$M\subset X$。□

定理 6.2.37 设X是无限维 Schur 空间，则X继承含l_1。

证明 易见(应用 Rosenthal 定理)X是 Schur 空间且$l_1\not\subset_{\to}X$，则$\dim X<+\infty$。且 Schur 空间的子空间仍为 Schur 空间。证毕。

注 反之不然。见(A-H-1)。□

定理 6.2.38 若X是 Polish (Banach)空间，则$l_1\not\subset_{\to}X$。

证明 若X是 Polish 空间，则X^*可分。证毕。

注 实际上 Edgar & Wheel (E-W-1)证明：

X是 Polish 空间$\Longrightarrow X$是 PCA 空间$\Longrightarrow X$有点自反(PCA 空间即 Asplund 空间且是 PC 空间)(X称为有点自反空间(Somewhat-reflexive)，如果X的每个无限维子空间含自反子空间)。最近 Finet 还证明X是 PCA 空间，则X是有点亚自反空间。(Fi-1)(注X称为有点亚自反空间，如果X的每个非自反空间含有序 1 的亚自反子空间，显然，有点亚自反空间是有点自反空间)。□

§3 l_∞及含l_∞的空间

首先，我们注意到l_∞是一个“很大”的空间，事实上，任何可分

Banach 空间 X 及其共轭空间 X^* 都可线性等距于 l_∞ 的闭子空间（即 l_∞ 是可分万有空间，也是可分空间的共轭空间的万有空间）。因此，一般来说，l_∞ 的（几何）性质并不好。但是，正如定理 1.2.7 证明的，l_∞ 却是至今知道的为数极少的素(prime)空间之一。此外，l_∞ 有一个值得注意的有用性质：l_∞ 是内射（injective）空间，甚至还是 $\mathscr{P}_1$ 空间，从而具有 Hahn-Banach 延拓性质。

在讨论中将 l_∞ 看作 $C(\beta N)$ 是方便的，其中 βN 是 N 的 Stone-Cěch 紧化，βN 是一个紧 Hausdorff-Stone 空间（拓扑空间 Ω 称为 Stone 空间，如果 Ω 中每个开集的闭包是开集）。

下面，我们首先归纳 l_∞ 的性质。

(1) l_∞ 是可分万有空间，也是可分空间的共轭空间的万有空间。(定义 6.3.1)(留作习题)；

(2) l_∞ 是素空间(定理 1.2.7)；

(3) l_∞ 是 $\mathscr{P}_1$ 空间，从而具有 Hahn-Banach 延拓性质，更是内射空间(定理 6.1.1 注 1)；

(4) l_∞ 是不可分的共轭空间；

(5) l_∞ 不具 wRNP (定理 6.3.1)；

(6) l_∞ 不是 wAsplund 空间，从而也不是 Asplund 空间(定义 6.3.2)(定理 6.3.2)；

(7) l_∞ 不具(ω)性质(定理 6.3.3)；

(8) $l_\infty \cong (l_1 \oplus c_0^\perp)_1$，$l_\infty^* \cong B_a(\Sigma)$，$l_\infty^* \cong M(\beta N)$ (定理 6.3.11)；

(9) l_∞ 是 Grothendieck 空间(定义 6.3.3)(定理 6.3.7)；

(10) l_∞ 不是 Mazur 空间(不是自反空间)(定义 6.3.4)(推论 6.3.9)；

(11) l_∞ 不是 B 凸的(定理 6.3.10)；

(12) $l_\infty \approx SC$ (可再赋等价严格凸范数)(定理 6.3.12)；

(13) $l_\infty \not\approx w$LUR(定义 3.1.3)(定理 6.3.13)；

(14) $l_\infty \not\approx sm$ (推论 6.3.22)；

(15) l_∞的每个 w 紧集是范数可分的(推论 6.3.34);

(16) l_∞的每个可分商空间是自反的(定理 6.3.35);

(17) $l_\infty/c_0 \not\simeq sm$(定理 3.3.37);

(18) $l_\infty/c_0 \not\simeq SC$(Bo-2).

定义 6.3.1 设$\mathscr{A}$是某类 Banach 空间,Banach 空间 X 称为$\mathscr{A}$万有($\mathscr{A}$-universal)空间,如果任何 $Y \in \mathscr{A}$, Y 线性等距于 X 的子空间.

注 万有空间的研究是十分有趣的问题. 读者可在参考书(H-1)第四章找到. 又 Borgain(Bo-1)证明不存在可分空间是可分自反万有空间. □

定理 6.3.1 l_∞不是 wRNP.

证明 因为 X^* 是 w RNP 当且仅当 $l_1 \not\hookrightarrow X$. 故 l_∞不具 w-RNP. (Du-1)有一个直接证明. 证毕.

定义 6.3.2 Banach 空间 X 称为 w Asplund 空间, 如果 X 的每个开凸集 E 上定义的连续凸函数 f 在 E 的一个稠 G_δ 集上是 Gateaux 可微的.

注 回忆起 Banach 空间 X 是 Asplund 空间, 如果 X 的每个开凸集 E 上定义的连续凸函数 f 在 E 的一个稠 G_δ 集上是 Frechet 可微的. 显然, Asplund 空间是 w Asplund 空间. □

定理 6.3.2 l_∞不是 w Asplund 空间, 从而 l_∞也不是 Asplund 空间.

证明 令$p(x) = \overline{\lim_n} |x_n|, \forall x = (x_n) \in l_\infty$.

显然, $p(x)$是 X 上连续凸函数. 我们证明 $p(x)$处处不 G 可微.

如果 $p(x) = 0$, 则 $x_n \longrightarrow 0$, 取 $e = (1, 1, \cdots)$, 则

$$\frac{p(x+te) - p(t)}{t} = \frac{|t|}{t}.$$

故

$$\lim_{t\to 0}\frac{p(x+te)-p(t)}{t}$$

不存在。从而 $p(\cdot)$不 G 可微(当 $p(x)=0$时)。

如果 $p(x)>0$,不妨设 $p(x)=1$,选 $x=(x_n)$的子序列$(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$,使$|x_{n_i}|\longrightarrow 1$,由于 $p(x)=p(-x)$,故如果必要转到子序列,我们假设$x_{n_i}>0,\forall i$。

定义 $y=(y_n)$如下:

$$y_n=\begin{cases}0 & \text{当 } n\neq n_i, \text{或 } n=n_{2k+1}, \forall k\\ 1 & \text{当 } n=n_{2k}, \forall k.\end{cases}$$

则

$$\frac{p(x+ty)-p(x)}{t}=\begin{cases}1 & \text{当 } t>0,\\ 0 & \text{当 } t<0.\end{cases}$$

故 $p(\cdot)$也不 G 可微。因此,l_∞ 不是 w Asplund 空间。从而,l_∞ 也不是 Asplund 空间。证毕。

注1 但可以证明 (Co-1)l_∞ 上任何范数连续且 w^* 下半连续的凸函数 f 在其定义域的稠 G_δ 集上 F 可微。□

注2 若 $\dim L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)=+\infty$,则 $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$上存在一个连续半范是处处不 G 可微的。例如,令 T是 $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ 到 l_∞上的连续线性算子(易见,它是存在的),令 $f=pT$,则 f 即所求,其中 p 为定理中定义的。□

注3 有关 w Asplund 空间的讨论见参考书(俞-1)第六章及(L-Ph-1)。□

定理 6.3.3 l_∞ 不具(ω)性质。

证明 令(x^n)是 l_∞ 上"坐标泛函,即对 $x=(a_k)_{k=1}^{\infty}$,$x^n(x)=a_n$。显然,$(x^n)_{n=1}^{\infty}\subset U(l_\infty^*)$,我们说$(x^n)$没有子序列是 w^* 收敛的。

事实上,对(x^n)的任何子列$(x^{n_i})_{i=1}^{\infty}$,令 $a=(a_j)\in l_\infty$:

$$a_j=\begin{cases}\dfrac{(-1)^j+1}{2}, & \text{当 } j\in(n_i)\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$$

则

$$x^{n_i}(a)=\frac{1+(-1)^i}{2},$$

故$(x^{n_i}(a))$不收敛。证毕。

推论 6.3.4 若 X 具(ω)性质,则 $l_\infty \subset\!\!\to X$。

证明 由于(ω)性质关于子空间是继承的,且(ω)性质是线性同胚不变的。证毕。

注 容易得到,对任何无限 Γ,$l_\infty(\Gamma)$不具(ω)性质,从而若X具(ω)性质,则 $l_\infty(\Gamma)\not\subset\!\!\to X$。 □

定义 6.3.3 Banach 空间 X 称为 Grothendieck 空间,如果 X^* 中每个 w^* 收敛的序列是 w 收敛的。

为了证明 l_∞ 是 Grothendieck 空间,我们先证明 Grothendieck 空间的若干等价条件。

定理 6.3.5 设 X 是 Banach 空间,则 TFAE:

(1) X 是 Grothendieck 空间;

(2) $L(X,Y)=WK(X,Y)$,$\forall$ 具(ω)性质的 Banach 空间. Y。

(3) $L(X,Y)=WK(X,Y)$,$\forall$ 可分 Banach 空间;

(4) $L(X,c_0)=WK(X,c_0)$。

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 Y 是具(ω)性质的 Banach 空间,任取$T\in L(X,Y)$,为了证明 $T\in WK(X,Y)$,只须证明 $T^*\in WK(Y^*,X^*)$.任取$(y_n^*)\subset U(Y^*)$,由于 Y 具(ω)性质,故存在(y_n^*)的子列$(y_{n_i}^*)$,使 $x_{n_i}^*\xrightarrow{w^*}y^*\in U(Y^*)$,由于 T^* 是 w^*—w^*连续的,所以$T^*y_{n_i}^*\xrightarrow{w^*}T^*y^*$,但 X 是Grothendieck 空间,故 $T^*y_{n_i}^*\xrightarrow{w}T^*y^*$.这表明 $T^*\in WK(X^*,X^*)$. 证毕.

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然。

(3)$\Longrightarrow$(4) 显然。

(4)$\Longrightarrow$(1) 设 $x_n^*\in X^*$,$x_n^*\xrightarrow{w^*}0$,令

$$T:X\longrightarrow c_0,\quad Tx=(x_n^*(x))_{n=1}^\infty.$$

显然,$T\in L(X,C_0)$,由假设$T\in WK(X,c_0)$,从而 $T^*\in WK(l_1,X)$,

且 $T^*e_n = x_n^*$，其中 (e_n) 为 l_1 的自然基，故 (x_n) 有子列 $(x_{n_i}^*)$，使 $(x_{n_i}^*)$ 是 w 收敛的。易见 $x_n^* \xrightarrow{w} 0$。故 X 是 Grothendieck 空间。证毕。

我们要用到一个重要的定理。其证明见参考书（D-U-1）p.156。定理 10。

定理 6.3.6(Rosenthal) 对任何紧 Hausdorff-Stone 空间 Ω，若 $l_\infty \not\hookrightarrow X$，则 $L(C(\Omega);X) = WK(C(\Omega),X)$。

定理 6.3.7 l_∞ 是 Grothendieck 空间。

证明 $l_\infty \cong C(\beta N)$，其中 βN 是自然数集具离散拓扑的Ston-Cěch 紧化。故由定理 6.3.6 知，$L(l_\infty, c_0) = WK(l_\infty, c_0)$，应用定理 6.3.5 知，$l_\infty$ 是 Grothendieck 空间。证毕。

定义 6.3.4 Banach 空间 X 称为 Mazur 空间，如果 X^* 上任何 w^* 序列连续线性泛函是 w^* 连续的（从而属于 $J_X(X)$）。

定理 6.3.8 若 X 是 Grothendieck 空间，且 X 是 Mazur 空间，则 X 是自反的。

证明 任取 $x^{**} \in X^{**}$，任取 $x_n^* \in X^*$，使 $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$，则由于 X 是 Grothendieck 空间，$x_n^* \xrightarrow{w} x^*$，从而 $x^{**}(x_n^*) \longrightarrow x^{**}(x^*)$，这表明 x^{**} 是 w^* 序列连续线性泛函，由于 X 还是 Mazur 空间，故 $x^{**} \in J_X(X)$，因此，X 是自反的。证毕。

推论 6.3.9 l_∞ 不是 Mazur 空间。

定理 6.3.10 l_∞ 不是 B 凸的。

证明 由于 B 凸空间的子空间仍是 B 凸的，而 c_0 不是 B 凸的（定理 6.1.7）。故 l_∞ 不是 B 凸的。证毕。

定理 6.3.11 (1) $l_\infty^* \cong (l_1 \oplus c_0^\perp)$；其中

$$c_0^\perp = \{\varphi \in l_\infty^{**};\ \varphi(x) = 0, \forall x \in c_0\};$$

(2) $l_\infty^* \cong B_a(2^N)$；

(3) $l_\infty^* \cong M(\beta N)$。

证明 (1) 设 $x \in l_1, \varphi \in c_0^\perp$，令

$$\Phi_{y,\varphi}(x)=\langle y,x\rangle+\langle x,\varphi\rangle,\forall x\in l_\infty.$$

则对一切 $x\in l_\infty$,

$$|\Phi_{y,\varphi}(x)|\leqslant|\langle y,x\rangle|+|\langle x,\varphi\rangle|.$$
$$\leqslant(\|y\|+\|\varphi\|)\|x\|,$$

故

$$\|\Phi_{y,\varphi}\|\leqslant\|y\|+\|\varphi\|.$$

为了证明相反不等式，取 $\psi\in l_\infty^*$，则 $\psi|_{c_0}\in c_0^*$，故存在 $y\in l_1$，使 $y=\psi|_{c_0}$，记 $\hat{y}=Jy$，其中 J：$l_1\longrightarrow l_\infty^*$ 的典型嵌入（以下记号"∧"有类似意义）。

令 $\varphi=\psi-\hat{y}$，则对每个 $x\in c_0$，

$$\varphi(\hat{x})=\psi(\hat{x})-\hat{y}(\hat{x})=0,$$

故 $\in c_0^\perp$，且 $\Phi_{y,\varphi}=\psi$，下面证明

$$\|\Phi_{y,\varphi}\|\geqslant\|y\|+\|\varphi\|.$$

为此，对任何 $\varepsilon>0$，存在自然数有限子集 Γ，使

$$\sum_{n\notin\Gamma}|y_n|<\varepsilon,\quad 其中\, y=(y_n).$$

定义 $x\in c_0$ 如下：

$$x_n=\begin{cases}\operatorname{sgn} y_n, & 当\, n\in\Gamma\, 时;\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则 $\|x\|=1$，选 $z\in U(l_\infty)$，使 $\varphi(z)>\|\varphi\|-\varepsilon$.

令 $z'=\chi_{N\setminus\Gamma}\cdot z$，则 $z'\in U(l_\infty)$，$x\cdot z=0$，并且 $\varphi(z')=\varphi(z)$，$x+z'\in l_\infty$，且 $\|x+z'\|=1$，从而

$$\begin{aligned}\|\Phi_{y,\varphi}\|&\geqslant\Phi_{y,\varphi}(x+z')=\langle x,y\rangle+\langle y,z'\rangle+\varphi(z')+\varphi(x)\\&=\langle x,y\rangle+\langle y,z'\rangle+\varphi(z)\\&\geqslant\|y\|-\varepsilon-\varepsilon+\|\varphi\|-\varepsilon\\&=\|y\|+\|\varphi\|-3\varepsilon.\end{aligned}$$

于是 $\|\Phi_{y,\varphi}\|=\|y\|+\|\varphi\|$。证毕。

注　可类似地证明，对任何无限集 Γ，有 $l_\infty(\Gamma)=(l_1(\Gamma)\oplus c_0(\Gamma)^\perp)_1$。□

(2) 设 2^N 为 N 的一切子集生成的 σ 代数，$B(2^N)=\{f$ 是 N

上一切 2^N 可测的有界函数}(在 $B(2^N)$ 中取上确界范数，$B(2^N)$ 成为Banach 空间)。注意 $l_\infty\cong B(2^N)$，令 $B_a(2^N)=\{(N,2^N)$ 上一切有限可加有界变差集函数}(取变差范数)。

任取 $x^*\in l_\infty^*$，设 $\Delta\in 2^N$，则 $\chi_\Delta\in l_\infty$，令

$$\mu_{x^*}(\Delta)=x^*(\chi_\Delta),$$

则 μ_{x^*} 是有限可加集函数，且 μ_{x^*} 的全变差 $\|\mu_{x^*}\|$ 是有限的。事实上，任取 N 的分割 $\pi=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$，

$$\sum_{i=1}^n|\mu_{x^*}(\Delta_i)|=\sum_{i=1}^n|x^*(\chi_{\Delta_i})|$$

$$=x^*\left(\sum_{i=1}^n\operatorname{sgn}(x^*\chi_{\Delta_i})\cdot\chi_{\Delta_i}\right)\leqslant\|x^*\|.$$

故 $\|\mu_{x^*}\|\leqslant\|x^*\|$，

反之，设 $\mu\in B_a(2^N)$，令

$$x_\mu^*\left(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{\Delta_i}\right)=\sum_{i=1}^n x_i\mu(\Delta_i),$$

则

$$\left|x_\mu^*\left(\sum_{i=1}^n x_0\chi_{\Delta_i}\right)\right|\leqslant(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|)\sum_{i=1}^n|\mu(\Delta_i)|$$

$$\leqslant\|\mu\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^n x_i\chi_{\Delta_i}\right\|,$$

由于$\left(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{\Delta_i}\right)$在 $B(2^N)$ 中稠，故 x_μ^* 可延拓为(仍记为 x_μ^*)$x_\mu^*\in l_\infty^*$，且 $\|x_\mu^*\|\leqslant\|\mu\|$。

所以，$\|x^*\|=\|\mu_{x^*}\|$。即 $l_\infty^*\cong B_a(2^N)$。证毕。

注　从证明中看到，实际上可证明对任何集 Ω，及 Ω 的子集的一个 σ 代数 Σ，有 $B(\Sigma)^*\cong B_a(\Sigma)$。□

(3) 由 Riesz 表示定理，$l_\infty^*\cong C(\beta N)^*\cong M(\beta N)$，其中，$M(\beta N)$ 是 βN 的一切正则 Borel 测度，取全变差范数。证毕。

定理 6.3.12　$l_\infty\approx SC$。

证明　令 T：$l_\infty\longrightarrow l_2$，$T(x_n)=(2^{-\frac{n}{2}}x_n)_{n=1}^\infty$，$\forall(x_n)\in l_\infty$。易见 T 是 1-1 有界线性算子，但 l_2 是严格凸(SC)的，令

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|Tx\|, \quad \forall x \in l_\infty,$$

易见$(l_\infty, \|\cdot\|)$是 SC 的，且$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_\infty$等价。证毕。

我们回忆起，Banach 空间 X 称为 w LUR，如果对任何

$$(x_n) \subset X, \quad x_0 \in X, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_0 + x_n\| = 2\|x_0\| = 2\lim_{n\to\infty}\|x_n\|,$$

则

$$x_n \xrightarrow{w} x_0.$$

注　容易证明 wLUR $\Longrightarrow$ SC。□

定理 6.3.13　$l_\infty \not\approx w$LUR。

证明　设$\|\cdot\|$是$(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$上等价范数，不妨设

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|, \quad \forall x \in l_\infty.$$

下面证明$(l_\infty, \|\cdot\|)$不是 w LUR。

对 $x = (x_n) \in l_\infty$，记 $\sigma(x) = \mathrm{supp}(x) = \{n; x_n \neq 0\}$。

令 $X = \{x \in l_\infty; N\setminus\sigma(x)$是无限的$\}$。

$\lambda = \sup\{\|x\|; x \in X, \|x\|_\infty = 1\}$（注意 $\lambda \geqslant 1$）。

(1) 选 $x_1 \in X$，使 $\|x_1\|_\infty = 1$，且 $\dfrac{3\lambda+1}{4} \leqslant \|x_1\|$。

令 N_1 是$N\setminus\sigma(x_1)$的无限子集，使$N\setminus(\sigma(x_1)\cup N_1)$也是无限的。

选 $i_1 \in N\setminus(\sigma(x_1)\cup N)$。

下面将记 l_∞ 元为$(x(i))_{i=1}^\infty$。

定义 $F_1 = \{y \in l_\infty;\ |y(i_1)| = 1 = \|y\|_\infty,\ \ y(i) = x_1(i)$，
当 $i \in \sigma(x_1)\cup N_1$，且 $N\setminus(\sigma(y)\cup\sigma(x_1)\cup N_1)$是无限的$\}$。
令

$$m_1 = \inf\{\|y\|; y \in F_1\}, M_1 = \sup\{\|y\|; y \in F_1\}.$$

容易看到 $2x_1 - F_1 = F_1$，故可得

$$\|x_1\| \leqslant \frac{M_1 + m_1}{2}$$

由于 $M_1 \leqslant \lambda$，但

$$\|x_1\| > \frac{3\lambda+1}{4},$$

故

$$\frac{2\lambda+1}{2}\leqslant 2\|x_1\|\leqslant M_1+m_1\leqslant\lambda+m_1.$$

因此，

$$M_1-m_1<\frac{\lambda-1}{2}.$$

(2) 选 $x_2\in F_1$，使

$$\frac{3M_1+m_1}{4}\leqslant\|x_2\|.$$

令 N_2 是 $N\backslash(\sigma(x_1)\cup N_1\cup\sigma(x_2))$ 的无限子集，使得

$$N\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n}\sigma(x_i)\cup N_i\right)$$

也是无限的。

选

$$i_2\in N\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n}\sigma(x_i)\cup N_2\right).$$

令

$$F_2=\{y\in l_\infty;\ y(i_2)=1=\|y\|_\infty,\ y(i)=x_2(i),$$

当

$$i\in\sum_{i=1}^{n}\sigma(x_i)\cup N_i$$

时，且

$$N\backslash\left(\sigma(y)\cup\bigcup_{i=1}^{2}(\sigma(x_i)\cup N_i)\right)$$

是无限的}.

令

$$m_2=\inf\{\|y\|;y\in F_2\},\ M_2=\sup\{\|y\|;y\in F_2\},$$

我们也有 $2x_2-F_2=F_2$，易见 $2\|x_2\|\leqslant M_2+m_2$，且

$$M_2-m_2\leqslant\frac{M_1-m_1}{2}\leqslant\frac{\lambda-1}{2^2}.$$

(3) 继续下去，得到：

(a) $x_n\in F_{n-1}$，$\dfrac{3M_{n-1}+m_{n-1}}{4}\leqslant\|x_n\|$；

(b) N_n 是 $N\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{n}\sigma(x_j)\cup\bigcup_{j=1}^{n-1}N_j\right)$的无限子集，且

$$N\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{n}\sigma(x_j)\cup N_j\right)$$

是无限的；

(c) $i_n\in N\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{n}\sigma(x_j)\cup N_j\right)$；

(d) $F_n=\{y\in l_\infty;|y(i_n)|=1=\|y\|_\infty, y(i)=x_n(i)$，当

$$i\in\bigcup_{j=1}^{n}\sigma(x_j)\cup N_j\text{时},$$

$$N\backslash\left(\sigma(y)\cup\bigcup_{j=1}^{n}(\sigma(x_j)\cup N_j)\right)$$

是无限的$\}$；

(e) $m_n=\inf\{\|y\|;y\in F_n\}, M_n=\sup\{\|y\|;y\in F_n\}$；

(f) $\dfrac{3M_{n-1}+m_{n-1}}{4}\leqslant\|x_n\|\leqslant\dfrac{M_n+m_n}{2}$，

$$m_{n-1}\leqslant m_n\leqslant M_n\leqslant M_{n-1}, M_n-m_n\leqslant\frac{\lambda-1}{2^n}；$$

(4) 由(3)中(a)、(d)知，x_n 与 x_{n-1} 在

$$\bigcup_{j=1}^{n-1}(\sigma(x_j)\cup N_j)$$

上相同，故存在 $x\in X(x\in F_n, \forall n)$，使对每个 n，x 与 x_n 在

$$\bigcup_{j=1}^{n}(\sigma(x_j)\cup N_j)$$

上相同，且 x 在

$$N\backslash\bigcup_{j=1}^{\infty}(\sigma(x_j)\cup N_j)$$

上为 0。

由(3)中(f)，$\lim\limits_{n}M_n=\lim m_n=\alpha$ 存在，且

$$\lim_{n}\|x_n\|=\alpha=\|x\|。$$

还有

$$\frac{x_r+x}{2}\in F_{n-1},$$

故

$$\lim_n \|x_n + x\| = 2\alpha.$$

根据(3)中(d)知道$|x(i_n)|=1, \forall n$.

(5) $x_n \xrightarrow{w} x$. 事实上,令 Lim 表示 l_∞上一个 Banach 极限,则 $\mathrm{Lim} \in l_\infty^*$.

定义 $x^*(y) = \mathrm{Lim}(x(i_n)y(i_n))$, $\forall y \in l_\infty$, 则 $x^* \in l_\infty^*$, 并且 $x^*(x_n) = 0$ (因$x_n(i_{n+k}) = 0, \forall k$),而$x^*(x) = 1$ (因$|x(i_n)| = 1, \forall i$). 从而$x_n \overset{w}{\nrightarrow} x_0$. 这表明$(l_\infty, \|\cdot\|)$不是 wLUR. 证毕.

$l_\infty \not\simeq sm$ (不可再赋等价光滑范数)最早由 M.M.Day 证明,现在有许多途径可证明它.例如,可以证明,(见参考书(D-1)p.229) 若 $C(\Omega)$是 Grothendieck 空间, 则 $C(\Omega) \not\simeq sm$. 由定理 6.3.6 知,$l_\infty (\cong C(\beta N)) \not\simeq sm$. 我们从更深入的一些得到 $l_\infty \not\simeq sm$.

首先,我们注意到对任 $x \in S(X)$, $y \in S(X)$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\|-1}{t}, \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+ty\|-1}{t}$$

总存在, 分别记它们为 $G_x^+(y), G_x^-(y)$.

容易看到,

$$-G_x^+(-y) = G_x^-(y),$$

$$-G_x^+(-y) \leqslant G_x^+(y).$$

由此容易看到,范数在 x 点 G 可微(等价于 x 为光滑点), 当且仅当 $G_x^+(-y) + G_x^+(y) = 0$. $\forall y \in S(X)$. 因此 X 是光滑的当且仅当$G_x^+(-y) = G_x^+(y)$, $\forall x \in S(X), y \in S(X)$.

定义 6.3.5 设 f 是 Banach 空间 X 的开凸子集 D 上定义的连续凸函数,对于 $x_0 \in D$,如果存在 $x^* \in X^*$,使得

$$\langle y - x_0; x^* \rangle \leqslant f(y) - f(x), \forall y \in D,$$

则称 x^* 为 f 在x_0点次梯度(次微分),记

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^*; x^* \text{ 是 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点次梯度}\}.$$

注 对于范数这个凸函数来说,当 $\|x_0\| = 1$ 时,

$$\partial \|\cdot\| (x_0) = \{x^* \in S(X^*); x^*(x_0) = 1\},$$

事实上，若 $x^* \in S(X^*)$，$x^*(x_0)=1$，则对任何 $y \in X$，

$$x^*(y) \leqslant \|x_0+y\| - x^*(x_0) = \|x_0+y\| - \|x_0\|.$$

从而 $x^* \in \partial\|\cdot\|(x_0)$。反之，设 $x^* \in \partial\|\cdot\|(x_0)$，则

$$x^*(y) \leqslant \|x_0+y\| - \|x_0\|, \forall y \in X,$$

故

$$x^*(x_0+y) \leqslant \|x_0+y\|, \forall y \in X,$$

因此，$\|x^*\| \leqslant 1$，且 $x^*(-x_0) \leqslant -\|x_0\|$，故 $x^*(x_0) = \|x^*\| = \|x_0\| = 1$，即 $\|x^* \in \{x^* \in S(X^*); x^*(x_0)=1\}$。□

引理 6.3.14 $\partial\|\cdot\|(x_0)$是单点集，当且仅当范数在 x_0点G 可微。

证明 “$\Longleftarrow$” 若范数在 x_0 点 G 可微，则

$$G_{x_0}^+(-y) = -G_{x_0}^+(y), \forall y \in S(X),$$

从而对任何 $x \in S(X)$

$$G_{x_0}^+(x-x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x_0+t(x-x_0)\| - \|x\|}{t}$$

$$\leqslant \|x\| - \|x_0\|.$$

易见，$G_{x_0}^+ \in \partial\|\cdot\|(x_0)$。

又若 $x^* \in \partial\|\cdot\|(x_0)$，则当 $t>0$ 时，

$$\langle y, x^* \rangle \leqslant \frac{\|x_0+ty\| - \|x_0\|}{t}, \forall y \in S(X),$$

因此，$\langle y, x^* \rangle \leqslant G_{x_0}^+(y)$，$\forall y \in S(X)$，同样，

$$\langle -y, x^* \rangle \leqslant G_{x_0}^+(-y), \forall y \in S(X),$$

故

$$\langle y, x^* \rangle = \langle y, G_{x_0}^+ \rangle, \quad \forall y \in X,$$

即 $x^* = G_{x_0}^+$。这表明 $\partial\|\cdot\|(x_0) = \{G_{x_0}^+\}$。

“$\Longrightarrow$” 若 $\partial\|\cdot\|(x_0)$是单点集，我们将证明

$$G_{x_0}^+(y) = G_{x_0}^-(y), \quad \forall y \in S(X).$$

从而$\|\cdot\|$在 x_0 点 G 可微。

若不然，存在 $y \in S(X)$，使

$$-G_{x_0}^+(-y) < G_{x_0}^+(y).$$

选 $\alpha\in R^1$，使

$$-G_{x_0}^+(-y)<\alpha<G_{x_0}^+(y).$$

令 $M=\mathrm{span}\{y\}$，定义

$$\psi\in M^*, (\psi ty)=t\alpha, \forall t,$$

则对任何 $x\in M$(我们此处将 $G_{x_0}^+$ 自然延拓到定义在整个 X 上)有

$$\psi(x)\leqslant G_{x_0}^+(x).$$

由 Hahn-Banach 定理(注意到 $G_{x_0}^+(\cdot)$是正齐性次可加泛函)，存在 ψ 的延拓$\bar{\psi}$，使 $\bar{\psi}$是X上线性泛函，且满足$\bar{\psi}\leqslant G_{x_0}^+$，于是，当 $z\in X$ 时，有

$$\bar{\psi}(z)\leqslant G_{x_0}^+(z)\leqslant\|x_0+z\|-\|x_0\|.$$

易见，$\bar{\psi}\in\partial\|\cdot\|(x_0)$，且注意到，若

$$-G_{x_0}^+(-y)<\alpha<\beta<G_{x_0}^+(y),$$

相应的如上定义的连续线性泛函为$\bar{\psi}_\alpha$、$\bar{\psi}_\beta$，则 $\bar{\psi}_\alpha$、$\bar{\psi}_\beta\in\partial\|\cdot\|(x_0)$，且

$$\|\bar{\psi}_\alpha-\bar{\psi}_\beta\|\geqslant(\bar{\psi}_\alpha-\bar{\psi}_\beta)(y)=\beta-\alpha.$$

从而与 $\partial\|\cdot\|(x_0)$是单点集矛盾！证毕。

与光滑性概念相反的是范数"粗糙"概念。我们仅介绍强粗糙概念及与之有关的较有趣的结果。

定义 6.3.6 Banach空间 X 称为(范数)强粗糙的，如果存在 $\varepsilon>0$，对每个 $x\in S(X)$，存在 $y\in S(X)$，使

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|-2}{t}>\varepsilon.$$

此时称 ε 为 X 的(一个)强粗糙系数。

注 注意到上面定义中的极限总存在，且等于 $G_x^+(y)+G_x^+(-y)$。因此，X是强粗糙的，等价于存在$\varepsilon>0$，对每个 $x\in S(X)$，存在 $y\in S(X)$，使

$$G_{x_0}^+(y)+G_{x_0}^+(-y)>\varepsilon. \quad\square$$

引理 6.3.15 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) X 是强粗糙的；

(2) $\exists \varepsilon>0$，使得每个 $x\in S(X)$，$\operatorname{diam}\partial\|\cdot\|(x)>\varepsilon$。

(3) $\exists \varepsilon>0$，对每个 $z\in X$，存在 $v\in S(X)$，使

$$\|z+tv\|\geqslant\|z\|+|t|\varepsilon.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 由于 X 是强粗糙的，根据定义 6.3.7 注知，存在 $\varepsilon>0$，对任何 $x\in S(X)$，存在 $y\in S(X)$，使得

$$\varepsilon-G_{x_0}^{+}(-y)<G_{x_0}^{+}(y).$$

由引理 6.3.14 证明知，存在 $x^*, x_2^*\in\partial\|\cdot\|(x_0)$，使

$$\|x_1^*-x_2^*\|\geqslant x_1^*(y)-x_2^*(y)>\varepsilon.$$

所以，$\operatorname{diam}(\partial\|\cdot\|(x_0))>\varepsilon$。证毕。

(2)$\Longrightarrow$(1) 若 X 不是强粗糙的，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in S(X)$，使对一切 $y\in S(X)$，有

$$G_{x_\varepsilon}^{+}(y)+G_{x_\varepsilon}^{+}(-y)<\varepsilon.$$

即

$$-G_{x_\varepsilon}^{+}(-y)<G_{x_\varepsilon}^{+}(y)<-G_{x_\varepsilon}^{+}(-y)+\varepsilon,\quad \forall y\in S(X).$$

任取 $x_1^*\ x_2^*\in\partial\|\cdot\|(x_\varepsilon)$，则对 $t>0, y\in S(X), i=1,2$，

$$x_i^*(y)\leqslant\frac{\|x_\varepsilon+ty\|-1}{t},\quad x_i^*(-y)\leqslant\frac{\|x-ty\|-1}{t},$$

所以，

$$-G_{x_\varepsilon}^{+}(-y)\leqslant x_i^*(y)\leqslant G_{x_\varepsilon}^{+}(y), \forall y\in S(X), i=1,2,$$

故

$$|x_1^*(y)-x_2^*(y)|<\varepsilon,\quad \forall y\in S(X),$$

即 $\|x_1^*-x_2^*\|<\varepsilon$，从而$\operatorname{diam}\partial\|\cdot\|(x_\varepsilon)<\varepsilon$。证毕。

(1)$\Longrightarrow$(3) 设 X 是强粗糙的，设 ε 为强粗糙系数。

令 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{4}$，设 $z\in X$，

若 $z=0$，任选 $v\in S(X)$，有

$$\|z+tv\|=|t|\geqslant\|z\|+|t|\varepsilon, \forall t.$$

若 $z\neq0$，不妨设 $\|z\|=1$，由强粗糙定义，$\exists y\in S(X)$，使得

$$G_z^{+}(-x)+G_z^{+}(y)>\varepsilon.$$

由引理 6.3.14 证明知，存在 $x_1^*, x_2^* \in \partial\|\cdot\|(z)$，使

$$\|x_1^* - x_2^*\| > x_1^*(y) - x_2^*(y) > \varepsilon.$$

令

$$w = y_0 + \frac{1}{2}(x_1^*(y) + x_2^*(y))x_0,$$

则 $\|w\| \leqslant 2$，且

$$x_1^*(w) = \frac{1}{2}(x_1^*(y) - x_2^*(y)) > \frac{1}{2}\varepsilon,$$

故 $w \neq 0$。令

$$v = \frac{w}{\|w\|}$$

则

当 $t > 0$ 时，$\|z + tv\| \geqslant x_1^*(z) + tx_1^*(v) \geqslant \|z\| + |t|\varepsilon_1$

当 $t < 0$ 时，$\|z + tv\| \geqslant x_2^*(z) + tx_2^*(v) \geqslant \|z\| + |t|\varepsilon_1$。

(3)$\Longrightarrow$(1)　显然。证毕。

引理 6.3.16　设 X 是强粗糙的，$\rho: X \longrightarrow R^1$ 是 G 可微函数，$\rho(0) = 0$，则非空集 $A = \{x \in X; \rho(x) \leqslant \|x\|\}$ 是无界的。

证明　由引理 6.3.15，设 $\varepsilon > 0$，使得对任何 $x \in S(X)$，存在 $y \in S(X)$，使

$$\|x + ty\| - \|x\| > |t|\varepsilon, \forall t.$$

即

$$\varepsilon\|ty\| + \|x\| \leqslant \|x + ty\|, \forall t.$$

在x上定义偏序：$y < x \Longleftrightarrow \varepsilon\|x - y\| + \|y\| \leqslant \|x\|$。

若 A 是有界的，则我们可证明这个偏序在 A 上有极大元x_0。事实上，取 $(x_n) \subset A, x_n < x_{n+1}$，则

$$\|x_n\| < \|x_{n+1}\| \leqslant \sup_{x \in A} \|x\|.$$

且

$$\|x_n - x_{n+k}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(\|x_{n+k}\| - \|x_n\|),$$

故$\{x_n\}$为 Cauchy 列，$x_n \longrightarrow x_0$，因为 A 是闭集，故 $x_0 \in A$，且

$$\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|.$$

但由于

$$\varepsilon\|x_{n+k}-x_n\| + \|x_n\| \leqslant \|x_{n+k}\|,$$

令 $k \longrightarrow \infty$ 知，$\varepsilon\|x_0 - x_n\| + \|x_n\| \leqslant \|x_0\|$，故

$$x_0 = \sup_n x_n,$$

由 Zorn 引理，A 有极大元。

又因 $\varepsilon\|ty\| + \|x_0\| \leqslant \|x_0 + ty\|$，$\forall t$，故$x_0 + ty \notin A$，$\forall t$。

所以，

$$\|x_0 + ty\| < \rho(x_0 + ty)\text{，又}\rho(x_0) \leqslant \|x_0\|,$$

故 $\forall t$，

$$\varepsilon|t| < \|x_0 + ty\| - \|x_0\| \leqslant \rho(x_0 + ty) - \rho(x_0).$$

这与 ρ 是 G 可微的。矛盾！证毕。

定理 6.3.17 若 $X \approx sm$，则 $X \not\ni$ 强粗糙。

证明 设$|||\cdot|||$为 X 上等价的光滑范数，$\|\cdot\|$为 X 上任何等价范数，不妨设

$$\|x\| \leqslant M|||x|||, \forall x \in X.$$

易见，$\rho(x) = |||x|||^2$ 是 G 可微的，$\rho(0) = 0$，且

$$\{x \in X; |||x|||^2 \leqslant \|x\|\} \subset \{x \in X; |||x|||^2 \leqslant M|||x|||\}$$
$$= \{x \in X; |||x||| \leqslant M\} \cup \{0\},$$

因此，由引理 6.3.16 知，$\|\cdot\|$不是强粗糙的。证毕。

定理 6.3.18 设 X 是 Banach 空间，则 TFAE：

(1) 每个等价范数不强粗糙；

(2) 对每个等价范数$|||\cdot|||$，每个 $\varepsilon > 0$，$U((X, |||\cdot|||)^*)$被 ε 暴露（即 $\exists x_0 \in X$，$|||x_0||| = 1$，使 $\mathrm{diam}(\partial|||\cdot|||(x)) < \varepsilon$）。

(3) 对每个 $\varepsilon > 0$，X^* 的每个 w^* 紧凸集K被 ε 暴露（即 $\exists x_0 \in S(X)$，使

$$\mathrm{diam}\,\{f \in K;\ f(x_0) = \sup_{g \in K} g(x_0)\} < \varepsilon).$$

证明 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 见引理 6.3.15。

(3)$\Longrightarrow$(2) 显然。

(2)$\Longrightarrow$(3) 任取 X^* 的 w^* 紧凸集 K，令

$$A=U(X^*)+K-K,$$

由于 A 是 w^* 闭，范有界，含 $U(X^*)$的均衡凸吸收集，容易看到，存在 X 上等价范数$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，使 $U((X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)^*)=A$。

不妨设 $M\|x\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|\leqslant\|x\|,\forall x\in X$。

由假设条件，对每个 $\varepsilon>0$，A 被 ε 暴露，设 $x_\varepsilon\in X$，$|\!|\!|x|\!|\!|=1$，使

$$\operatorname{diam}\{\Phi\in A;\Phi(x_\varepsilon)=|\!|\!|x_\varepsilon|\!|\!|\}<\varepsilon.$$

令

$$y_\varepsilon=\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|},\ \text{则}\|y_\varepsilon\|=1.$$

令

$$B=\{f\in K;f(y_\varepsilon)=\sup_{g\in K}g(y_\varepsilon)\}.$$

选 $y_\varepsilon^*\in X^*$，使 $\|y_\varepsilon^*\|=1=y_\varepsilon^*(y_\varepsilon)$，则

$$\left\|\frac{y_\varepsilon^*}{\|x_\varepsilon\|}\right\|=\frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\leqslant1.$$

任取 $f,g\in B$，则

$$\frac{1}{\|x_\varepsilon\|}y_\varepsilon^*+f-\frac{1}{2}(f+g)\in\{\Phi\in A;\ \Phi(x_\varepsilon)=|\!|\!|x_\varepsilon|\!|\!|=1\}.$$

$$\frac{1}{\|x_\varepsilon\|}y_\varepsilon^*+g-\frac{1}{2}(f+g)\in\{\Phi\in A;\Phi(x_\varepsilon)=|\!|\!|x_\varepsilon|\!|\!|=1\}.$$

故

$$\|f-g\|=\Big\|\frac{1}{\|x_\varepsilon\|}y_\varepsilon^*+f-\frac{1}{2}(f+g)$$
$$-\Big(\frac{1}{\|x_\varepsilon\|}y_\varepsilon^*+g-\frac{1}{2}(f+g)\Big)\Big\|<\varepsilon$$

从而 $\operatorname{diam}B<\varepsilon$。证毕。

定义 6.3.7 X^* 称为有 w^*G_δ 端点，如果 X^* 的每个 w^* 紧凸集 K，存在 $x\in\operatorname{ext}K$，使 x 是(K,w^*)的 G_δ 点。

引理 6.3.19 若对每个 $\varepsilon>0$，X^* 的每个 w^* 紧凸集被 ε 暴露，则 X^* 具 w^*G_δ 端点。

证明 任取 w^* 紧凸集 $K\subset X^*$，由假设存在 $x_1\in S(X)$，使

$$\operatorname{diam}\{f\in K; f(x_1)=\sup_{g\in K} g(x_1)\}<1.$$

令

$$F_1=\{f\in K,\ f(x_1)=\sup_{g\in K} g(x_1)\},$$

则 F_1 也是 w^* 紧凸集（这样集由 K 的 w^*Face），由假设存在 $x_2\in S(X)$，使

$$\operatorname{diam}\{f\in F_1; f(x_2)=\sup_{g\in F_1} g(x_2)\}<\frac{1}{2}.$$

继续下去，得 w^* 紧凸集列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $F_{n+1}\subset F_n, F_n\subset K$，且 $\operatorname{diam}F_n<\frac{1}{n}$。

令

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n,$$

由于 $\operatorname{diam}F_n\longrightarrow 0$，故 $F=\{x_0^*\}$，显然 $x_0^*\in \operatorname{ext}K$，且

$$\{x_0^*\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x^*\in K;\ |x_0^*(x_i)-x^*(x_i)|<\frac{1}{n},\ 1\leqslant i\leqslant n\right\},$$

故 x_0^* 是(K,w^*)的 G_δ 集。证毕。

定理 6.3.20 若 X^* 具 w^*G_δ 端点，则 X 具(ω)性质。

证明 设$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset U(X^*)$，令

$$A_n=\overline{\{x_k^*; k\geqslant n\}}^{*}, A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,$$

则 A 是非空 w^* 紧集。令 $K=\overline{c_0}^*(A)$，由假设，存在 K 的 w^*G_δ端点 x_0^*。由 Krein-Milman 定理，$x_0^*\in A$，且 x_0^* 是 (A,w^*) 的 G_δ 集，因此，存在 X^* 的 w^* 开集序列$(V_n)_{n=1}^{\infty}$，使

$$\overline{V}_{n+1}^*\subset V_n,\quad 且\{x_0^*\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap A).$$

对每个 i，$\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\cap V_i$ 是无限的（事实上，否则，存在 i 及 n，使

$\{x_k^*; k\geqslant n\}\cap V_i=\Phi$，故$A_n\cap V_i=\Phi$，从而$V_i\cap A=\Phi$，矛盾!）故可选$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$的子列$(x_{n_i}^*)_{i=1}^{\infty}$，使$x_{n_i}^*\in V_i$，$\forall i$。

我们有$x_{n_i}^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$。事实上，只须证明若$y^*$是$\{x_{n_{i_j}}^*\}_{j=1}^{\infty}$的$w^*$闭包点，则$y^*=x_0^*$，首先，$y^*\in A$，又因对每个$n$，当$i_j\geqslant n+1$时，

$$\{x_{n_{i_j}}^*\}\subset V_{i_j}\subseteq V_{n+1},$$

故$y^*\in\overline{V_{n+1}}^*\subset V_n$。从而$y^*\in V_n\cap A$，$\forall n$。因此，$y^*=x_0^*$证毕。

定理 6.3.21 若$X\approx sm$，则X具(ω)性质。

证明 由定理6.3.17；定理6.3.18，引理6.3.19，定理6.3.20即知。证毕。

推论 6.3.22 $l_\infty\not\approx sm$。

证明 由定理6.3.3，l_∞不具(ω)性质，由定理6.3.21知，$l_\infty\not\approx sm$。证毕。

定理 6.3.23 若X是可分的Banach空间，则X^*的w紧子集是范数可分的。

证明 设K是X^*的w紧子集，则K是范数有界的。由X是可分的，故(K,w^*)是可度量化的。

令$I:(K,w)\longrightarrow(K,w^*)$是恒等映象，则$I$是1-1连续的，从而，$I$是同胚映象。因此，$(K,w)$是可度量化的，从而$(K,w)$是可分的，即存在$\{x_n^*\}\subset K$，使得$\overline{\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}}^w\supset K$，因此，

$$\overline{\text{span}}\{x_n^*\}=\overline{\text{span}}^w\{x_n^*\}\supset\overline{\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}}^w\supset K.$$

这表明K是范数可分的。证毕。

推论 6.3.24 l_∞的ω紧子集是范数可分的。

定理 6.3.25 l_∞的可分商空间是自反的。

证明 设l_∞/Y是可分商空间。令$Q: l_\infty\longrightarrow l_\infty/Y$是商映象，由于$l_\infty/Y$是可分的，故$l_\infty\not\hookrightarrow l_\infty/Y$，因此，由定理6.3.6（Rosenthal定理）知Q是w紧的，又$U(l_\infty/Y)=QU(l_\infty)$，故$U(l_\infty/Y)$是$w$紧的。从而$l_\infty/Y$是自反的。证毕。

定理 6.3.26 设Y是X的闭子空间，若Y具(ω)性质，$X/Y\approx sm$，则X具(ω)性质。

证明　设$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset U(X^*)$。

令 $y_n^*=x_n^*|_Y$，则 $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}\subset U(Y^*)$。由于 Y 具(ω)性质，故存在$(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 的子列(仍记作 $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$)使

$$y_n^*\xrightarrow{w^*}y^*\in Y^*.$$

由 Hahn-Banach 定理，将 y^* 保范延拓为 $x^*\in X^*$。

令 $f_n=x_n^*-x^*$，则(f_n)是 X^* 中有界序列，下面我们将证明$(f_n)_{n=1}^{\infty}$有子列 w^* 收敛，从而(x_n^*)有子列 w^* 收敛，故 X 具(ω)性质。

为了记号方便，若 $M=\{n_1,n_2,\cdots\}\subset N$，用 M 代表$\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，用 M' 表示$\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 的 w^* 聚点(或叫 w^* 闭包点)。

显然，任何 $M\subset N$，有 $M'\subset Y^{\perp}$。

令$K=\overline{c_0}^{*}(N')$，则 K 是 $Y^{\perp}$ 的 w^* 紧凸子集，由于 $X/Y\approx sm$，根据定理 6.3.17，定理 6.3.18 和定理 6.3.19，知$(X/Y)^*\cong Y^{\perp}$的每个 w^* 紧凸子集有 w^*G_δ 端点，故存在$g\in \text{ext}\,K\subset N'$(应用 Krein-Milman 定理及 N' 是 w^* 紧的)使$\{g\}$是(K,w^*)的G_δ集。

选 X^* 的 w^* 开集列 $(U_n)_{n=1}^{\infty}$，使

$$\overline{U}_i^*\subset U_{i-1}\text{且}\{g\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_i\cap K)$$

选择 N 的子序列的列$\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$，使

$$N\supset N_1\supset N_2\supset\cdots,\quad N_i\subset U_i.$$

(注意 $N_i=\{f_l\}_{l\in N_i}$)。

令$(f_{n_i})_{i=1}^{\infty}$是 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 的子序列，使 $f_{n_i}\in N_i$，则

$$\{f_{n_i},i\subset N\}'\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}N_i'\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}(\overline{U}_i^*\cap K)=\{g\}.$$

故$f_{n_i}\xrightarrow{w^*}g$。证毕。

推论 6.3.27　$l_\infty/c_0\not\approx sm$。

下面我们讨论含 l_∞ 空间(不含 l_∞ 空间)的性质。

(1) $l_\infty\subset_\rightarrow$无限维内射空间(定理 6.3.38)。

(2) $l_\infty \not\subset_\to X^* \Longleftrightarrow \left((x_n^*) \subset X, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*\right.$ 是w*uC$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*$ 无条件收敛)(定理 6.3.40)。

(3) X 具(ω)性质$\Longrightarrow l_\infty \not\subset_\to X$(推论 6.3.4)。

(4) $l_\infty \approx L_\infty$(定理 6.3.43)。

(5) $l_2 \approx l_\infty / Y$,对某个 $Y \subset l_\infty$(定理 6.3.44)。

(6) l_∞ / X 自反$\Longrightarrow l_\infty \subset_\to Y$(参考书(L-T-1)p.110)。

(7) 若 Ω 是紧 Hausdorff-Stone 空间,$l_\infty \not\subset_\to X$,则

$$L(C(\Omega), X) = WK(C(\Omega), X)\text{(定理 6.3.6)。}$$

下面给出证明。

定理 6.3.28 $l_\infty \subset_\to$无限维内射空间。

证明 设 X 是无限维内射空间,取 Γ(实际可取 Γ 为 $S(X^*)$ 中 norming 集),使 $X \cong Y \subset l_\infty(\Gamma) \cong C(\Omega)$,其中 Ω 是离散空间Γ的 Stone-Cěch 紧化(可以证明它是一个紧 Hausdorff-Stone 空间,或利用 $l_\infty(\Gamma)$是 $\mathscr{P}_1$ 空间,从而 $C(\Omega)$ 是 $\mathscr{P}_1$ 空间,利用 Nachbin-Kelly 定理知 Ω 是 Stone 空间。)

令 $I: Y \longrightarrow Y$ 是恒等算子,显然 Y 也是内射空间,从而存在 $P: C(\Omega) \longrightarrow Y$ 的(有界)投影。因 $\dim Y = +\infty$。由推论 1.2.11 知,P 不是 w 紧的,因 Ω 是 Stone 空间,故应用定理 6.3.6 知 $l_\infty \subset_\to Y \cong X$,即 $l_\infty \subset_\to X$。证毕。

注 这个定理表明 l_∞ 是"最小"的无限维内射空间。□

定理 6.3.39 若$(x_n^*) \subset X^*$,则

Σx_n^* 是 w*uC 当且仅当 Σx_n^* 是 wuC。

即 $\Sigma |x_n^*(x)| < +\infty, \forall x \in X$,当且仅当

$$\Sigma |x^{**}(x_n^*)| < +\infty, \quad \forall x^{**} \in X^{**}.$$

证明 "$\Longrightarrow$" 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| < +\infty, \forall x \in X,$$

则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^*\right)_{n=1}^{\infty}$$

是 w^*Caucny 序列，从而范数有界，由 Banach-Alaoglu 定理，易见，

$$w^* \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^* = x^* \in X^*.$$

若$(t_n)\in c_0$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n x_n^*(x)| < +\infty, \forall x \in X,$$

同理，

$$w^* \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} t_k x_k^*$$

存在,因此我们可以定义算子：$c_0 \longrightarrow X^*$,

$$T(t_n) = w^* \lim \sum_{k=1}^{n} t_k x_k^*.$$

T 是闭线性算子,应用闭图象定理知,$T\in L(c_0, X^*)$。

对任 $x^{**}\in S(X^{**})$,任何 n,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x^{**}(x_k^*)| &= x^{**}\left(\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sgn} x^{**}(x_k^*)) x_k^*\right) \\
&\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sgn} x^{**}(x_k^*)) x_k^* \right\| \\
&= \| T(\operatorname{sgn} x^{**}(x_1), \cdots, \operatorname{sgn} x^{**}(x_n^*), 0 \cdots) \| \\
&\leqslant \|T\|.
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^{**}(x_k^*)| \leqslant \|T\| \cdot \|x^{**}\|, \forall x^{**} \in X^{**},$$

即 $\sum_{k=1}^{\infty} x_i^*$ 是 wuC。证毕。

注　我们顺便给出下列有用的等价条件，它们容易从闭图象定理得到：设$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$,则 TFAE:

(1) Σx_n 是 wuC;

(2) $\exists C>0$,使得任何$(t_n)\in l_\infty$,

$$\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\| \leqslant C \sup_n |t_n|;$$

(3) 对任何$(t_n)\in c_0$，$\Sigma t_n x_n$是收敛的；

(4) 对任何$(t_n)\in c_0$，$\Sigma t_n x_n$是无条件收敛的；

(5) $\exists C>0$，对任何有限集$\Delta\subset N$，$\theta_i=\pm 1$，有

$$\left\|\sum_{i\in\Delta}\theta_i x_i\right\|\leqslant C。$$

□

定理 6.3.30 设X是Banach空间，则TFAE：

(1) $l_\infty \not\subset_\to X^*$；

(2) $c_0 \not\subset_\to X^*$；

(3) 任$(x_n^*)\subset X^*$，Σx_n^* w*uC$\Longrightarrow\Sigma x_n^*$无条件收敛；

(4) 任$(x_n^*)\subset X^*$，Σx_n^* wuC $\Longrightarrow\Sigma x_n^*$无条件收敛。

证明 由定理6.1.27及定理6.3.39即得。证毕。

为了证明$l_2\approx l_\infty/Y$，对某个$Y\subset l_\infty$，我们须作点准备。

定义 6.3.8 R^1上一个偏序Banach空间X称为Banach格，如果

(1) $x\leqslant y\Longrightarrow x+z\leqslant y+z$，$\forall x,y,z\in X$，

(2) $a\geqslant 0, x\geqslant 0\Longrightarrow ax\geqslant 0$，其中$a\in R^1$，$x\in X$，

(3) 对任何$x,y\in X$，上确界（记作$x\vee y$）和下确界（记作$x\wedge y$）存在，

(4) 当$|x|\leqslant|y|$时，$\|x\|\leqslant\|y\|$，其中$x,y\in X$，$|x|=x\vee(-x)$。

Banach格称为序完备的，如果每个有上界子集有上确界。

注 通常$L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，$C(\Omega)$都是Banach格，其中$f\leqslant g$定义为$f(\omega)\leqslant g(\omega)$，$\omega\in\Omega$（或a.e$\omega\in\Omega$）。□

定理 6.3.31 L_∞是序完备的。

证明 令$A\subset L_\infty$，$f\leqslant g\in L_\infty$，$\forall f\in A$。如果必要用有限集的上确界代替A，可假设$A=\{f_\alpha,\alpha\in D\}$，其中$D$为定向集，

$$(\alpha_1,\alpha_2\in D,\alpha_1\leqslant\alpha_2,$$

则$f_{\alpha_1}\leqslant f_{\alpha_2}$)。

对每个$x\in L_1$，$x\geqslant 0$，有$\langle x,f_\alpha\rangle\leqslant\langle x,g\rangle$，故

$$\varphi(x)=\lim_{\alpha}\langle x,f_\alpha\rangle$$

存在，对任 $x\in L$，定义

$$\varphi(x)=\varphi(x^+)-\varphi(x^-),$$

其中

$$x=x^+-x^-,x^+=x\vee 0,x^-=x\wedge 0)。$$

则 φ 是 L_1 上线性泛函，且 $|\varphi(x)|\leqslant|\varphi(x^+)|+|\varphi(x^-)|\leqslant|g(x)+|g(x^-)|\leqslant\|g\|_\infty(\|x^+\|+\|x^-\|)=\|g\|_\infty\cdot\|x\|$，故 $\varphi\in(L_1)^*\cong L_\infty$，令 φ 相应的 L_∞ 元为 h，由于 $\langle x,h-f_\alpha\rangle\geqslant 0,\forall x\in L_1,x\geqslant 0$，故 $h\geqslant f_\alpha$，即 h 是 A 的上界。设 k 是 A 的上界，则

$$\langle x,f_\alpha\rangle\leqslant\langle x,k\rangle,\forall x\in L_1,x\geqslant 0,$$

从而

$$\langle x,h\rangle=\varphi(x)\leqslant\langle x,k\rangle,\forall x\in L_1,x\geqslant 0,$$

即 $h\leqslant k$，这表明 $h=\sup A$。证毕。

注　证明中仅用到 $(L_1)^*\cong L_\infty$。因此，对使

$$(L_1(\Omega,\Sigma,(\mu))^*\cong L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$$

的 (Ω,Σ,μ)，特别是 σ 有限测度空间，$L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ 是序完备的。也可证明，当 Ω 是紧 Hausdorff 空间时，$C(\Omega)$ 是序完备的，当且仅当 Ω 是 Stone 的(参考书(L-T-Ⅱ)p.4)。□

定理 6.3.32　L_∞ 是 $\mathscr{P}_1$ 空间。

证明　设 L_∞ 为 X 的子空间。令 e 为 L_∞ 中恒等于 1 的元。g: $X\longrightarrow L_\infty,g(x)=\|x\|e$，则 g 是次可加函数。且对 L_∞ 上恒等映象 I 有 $I\leqslant g|_{L_\infty}$。利用 L_∞ 是序完备的，根据 Hahn-Banach 定理证法(用 Zorn 引理)可得 I 的延拓 $P:X\longrightarrow L_\infty$，使 $P\leqslant g$，从而 P 为范数是 1 的投影。证毕。

注　证明中仅用到序完备性。因此容易看到，对使得

$$L_1(\Omega,\Sigma,\mu)^*\cong L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$$

的 $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ 及 $C(\Omega)$，其中 Ω 为紧 Hausdorff-Stone 空间，都是 $\mathscr{P}_1$ 空间。□

定理 6.3.33　$L_\infty\approx l_\infty$。

证明　由于$L_1^* \cong L_\infty$，l_∞是可分空间的共轭空间的万有空间，故$L_\infty \cong Y \subset l_\infty$，由于$L_\infty$是$\mathscr{P}_1$空间，故$L_\infty \overset{c}{\subset} l_\infty$，另一方面，易见$l_\infty \subset\!\!\to L_\infty$，由于$l_\infty$也是$\mathscr{P}_1$空间，故$l_\infty \overset{c}{\subset} L_\infty$，容易证明$L_\infty \approx L_\infty \oplus L_\infty$，$l_\infty \approx l_\infty \oplus l_\infty$，由 Pelczynski 分解方法（定理 1.2.5 知，$L_\infty \approx l_\infty$。证毕。

注　推论 1.3.5 指出，$l_p \not\approx L_p$，$1 \leqslant p < +\infty, p \neq 2$。事实上，易见$l_p \subset\!\!\to L_p$，但$L_p \not\subset\!\!\to l_p$（因为由推论 1.3.4　$l_2 \subset\!\!\to L_p$，且由定理 1.2.3 知l_2与l_p互不嵌入）。□

定理 6.3.34　$l_2 \approx l_\infty / Y$，对某个$Y \subset l_\infty$。

证明　由推论 1.3.4，$l_2 \subset\!\!\to L_1$，故$l_2 \approx L_\infty / Y_1$，对某个$Y_1 \subset L_\infty$，但由定理 6.3.43 知，$L_\infty \approx l_\infty$，故$l_2 \approx l_\infty / Y$，对某个$Y \subset l_\infty$。证毕。

我们以下面有趣的关于l_p $1 \leqslant p \leqslant +\infty$，$c_0$的自等距刻划来结束这些讨论。

定理 6.3.35　设$X = c_0, l_p$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty, p \neq 2$，$T$是$X \longrightarrow X$的满线性等距，则必存在$(\theta_i)_{i=1}^\infty$，$\theta_i = \pm 1$，及自然数的一个置换$\pi$，使

$$T(a_1, a_2 \cdots) = (\theta_1 a_{\pi(1)}, \theta_2 a_{\pi(2)}, \cdots).$$

证明　(1) $1 \leqslant p < +\infty, p \neq 2$。

(a) 首先易见对$x = (a_i)_{i=1}^\infty$，$y = (b_i)_{i=1}^\infty$，

$$\|x + y\|^p = \|x - y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p,$$

当且仅当x, y有不相交支撑（即$a_i b_i = 0$）。

(b) 令(e_n)表示自然基，则由(a)，$(Te_i)_{i=1}^\infty$具不相交支撑。

(c) 因为T是满的，故必存在$(\theta_i)_{i=1}^\infty$，其中$\theta_i = 1$或-1，及自然数置换$\pi(i)$，使$Te_i = \theta_i e_{\pi(i)}$。

(2) 对c_0情况类似证明，或考虑$T^*: l_1 \longrightarrow l_1$。

(3) 对l_∞应用 Banach-Stone 定理：对紧 Hausdorff 空间Ω_1, Ω_2，

$$C(\Omega_1) \cong C(\Omega_2) \Longleftrightarrow \Omega_1 \sim \Omega_2.$$

证毕。

§4 $(1+\varepsilon)$嵌入问题

我们记 $X \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} Y$ 为存在 $Z \subset Y$，使 $d(X,Z) \leqslant 1+\varepsilon$。

我们有下列有趣结果：

(1) $c_0 \hookrightarrow X \Longrightarrow c_0 \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X, \forall \varepsilon > 0$ （定理 6.4.1）；

(2) $l_1 \hookrightarrow X \Longrightarrow l_1 \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X, \forall \varepsilon > 0$ （定理 6.4.2）；

(3) $l_\infty \hookrightarrow X \Longrightarrow l_\infty \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X, \forall \varepsilon > 0$ （Pa-1）；

(4) $X \approx UR \Longrightarrow X \overset{1+\varepsilon}{\approx} UR$ （定理 6.4.3）；

(5) $\forall M \subset c_0, c_0/M \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} c_0$（As-1）。

但是，对 $1 < p < +\infty$，$l_p \hookrightarrow X \overset{?}{\Longrightarrow} l_p \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$ 仍是一个Open问题。

定理 6.4.1 $c_0 \hookrightarrow X \Longrightarrow c_0 \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$，$\forall \varepsilon > 0$。

证明 由 $c_0 \hookrightarrow X$，则存在 m、M 及 $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$，使

$$m \sup_n |a_n| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\| \leqslant M \sup_n |a_n|, \forall (a_n) \in c_0.$$

对任何 $n \in N$，令 $A_n = \{(a_i) \in c_0, a_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n, a_i$ 仅有限项不为 0，且 $\sup_i |a_i| = 1\}$。则

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots,$$

令

$$K_n = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \right\|; (a_i) \in A_n \right\},$$

则

$$m \leqslant K_{n+1} \leqslant K_n \leqslant M, \forall n,$$

故

$$\lim_n K_n = K$$

存在。且 $m \leqslant K \leqslant K_{n+1} \leqslant K_n \leqslant M, \forall n$。

令 θ,θ'，使 $0<\theta<1<\theta'$，且

$$\frac{1}{1+\varepsilon}<\frac{2\theta-\theta'}{\theta'}.$$

选 p_1，使 $K_{p_1}<\theta'K$，又由于 $\theta K<K_n, \forall n$，故可归纳选取 $(p_1)<p_2<\cdots<p_n<\cdots$，使 $\|y_n\|>\theta K, \forall n$，其中

$$y_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i^n x_i,\quad (a_i^n)\in A_{p_n}.$$

对任何 $(b_i)\in c_0$，(b_i) 仅有限项不为 0，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{\|(b_i)\|}y_i\right\|\leqslant K_{p_1}<\theta'K.$$

从而

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_i\frac{y_i}{\theta'K}\right\|\leqslant\sup_i|b_i|,\quad \forall(b_i)\in c_0,(b_i)$$

仅有限项不为0。

令

$$u_i=\frac{y_i}{\theta'K},$$

则

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_iu_i\right\|\leqslant\|(b_i)\|,\forall(b_i)\in c_0,$$

(b_i) 仅有限项不为 0。

另一方面，对任何 $(b_i)\in c_0$，$\|(b_i)\|=1$，(b_i) 仅有限项不为 0。存在 k，使

$$\sup_i|b_i|=|b_k|=1$$

$$\left\|b_ky_k-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{\infty}b_iy_i\right\|\leqslant\theta'K,$$

故 $$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_iy_i\right\|\geqslant\|2b_ky_k\|-\left\|b_ky_k-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{\infty}b_iy_i\right\|\geqslant2\theta K-\theta'K.$$

从而

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_iu_i\right\|>\frac{2\theta K-\theta'K}{\theta'K}=\frac{2\theta-\theta'}{\theta'}>\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

易见，　　$(b_i)_{i=1}^{n}$，有

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|b_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}b_iu_i\right\|\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|b_i|,$$

由此，容易得到，对任$(b_i)\in c_0$，有

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sup_{i}|b_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_iu_i\right\|\leqslant\sup_{i}|b_i|.$$

即 $c_0\overset{1+\varepsilon}{\subset\!\dashrightarrow}X$。证毕。

定理 6.4.2 $l_1\subset\!\dashrightarrow X\Longrightarrow l_1\overset{1+\varepsilon}{\subset\!\dashrightarrow}X,\forall\varepsilon>0$。

证明　由 $l_1\subset\!\dashrightarrow X$，则存在 m、$M>0$ 及 $(x_i)_{i=1}^{\infty}\subset X$，使

$$m\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\|\leqslant M\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|,\forall(a_i)\in l_1.$$

令

$$\lambda_n=\inf\left\{\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\|;a_1=\cdots=a_n=0,\quad\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|=1,\right.$$

a_i 仅有限项不为 0$\}$，则 $m\leqslant\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}\leqslant M,\forall n$，故
$\lim\limits_{n}\lambda_n=\lambda$ 存在，且 $m\leqslant\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}\leqslant\lambda\leqslant M,\forall n$。

选

$$\theta,\theta',0<\theta'<1<\theta,\frac{\theta'}{\theta}>\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

取 p_1 使 $\theta'\lambda<\lambda_{p_1}$，归纳选取$(p_1)<p_2<\cdots<p_n<\cdots$，使 $\|y_n\|<\theta\lambda,\forall n$，其中

$$y_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_ix_i,\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|=1,$$

则对 $\forall(b_i)\in l_1$，(b_i)仅有限项不为 0。

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_i\frac{y_i}{\theta\lambda}\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|.$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_i\frac{y_i}{\theta\lambda}\right\|\geqslant\frac{\lambda_{p_1}}{\theta\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|>\frac{\theta'}{\theta}\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|.$$

令

$$u_i=\frac{y_i}{\theta\lambda},$$

易见，对 $\forall (b_i)\in l_0$，有

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_iu_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|.$$

即 $l_1 \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$。证毕。

定理 6.4.3 设 $|\cdot|$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 上等价一致凸范数，$0<r\leqslant 1$，令

$$|||x|||=r|x|+(1-r)\|x\|,\forall x\in X,$$

则 $|||\cdot|||$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 上等价一致凸范数。

证明　不妨设 $\|x\|<|x|\leqslant K\|x\|,\forall x\in X$，则

$$|||x|||\leqslant|x|\leqslant C(r)^{-1}|||x|||,\forall x\in X,$$

其中

$$C(r)=r+(1-r)\frac{1}{K}.$$

(1) 我们有对任 $\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0$，使得当

$$|||x|||=|||y|||=1,|||x-y|||>\varepsilon$$

时，有

$$\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|\geqslant\eta(\varepsilon).$$

事实上，否则 $\exists\varepsilon_0>0$，及

$$|||x_n|||=|||y_n|||=1,|||x_n-y_n|||>\varepsilon_0,$$

但

$$\left|\frac{x_n}{|x_n|}-\frac{y_n}{|y_n|}\right|<\frac{1}{n},$$

于是

$$\left|\frac{1}{|x_n|}-\frac{1}{|y_n|}\right|=\left|\left|\left|\left|\frac{x_n}{|x_n|}\right|\right|\right|-\left|\left|\left|\frac{y_n}{|y_n|}\right|\right|\right|\right|$$

$$\leqslant\left|\left|\left|\frac{x_n}{|x_n|}-\frac{y_n}{|y_n|}\right|\right|\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{x_n}{|x_n|}-\frac{y_n}{|y_n|}\right|\longrightarrow 0.$$

由于 $(|x_n|),(|y_n|)$ 为有界数列，有子列使 $|x_{n_i}|\longrightarrow a(\neq 0)$，

从而 $|y_{n_j}|\longrightarrow a$，即得 $|x_{n_j}-y_{n_j}|\longrightarrow 0$ 矛盾！故(1)成立。

设 $\forall x,y\in X$，$|x|=|y|=1$，$|x-y|>\varepsilon$，有

$$|x+y|<2(1-\delta(\varepsilon)).$$

(由 $(X,|\cdot|)$ 是一致凸)。

对任 $\varepsilon>0$，$\|x\|=1=\|y\|$，$\|x-y\|>\varepsilon$，不妨设 $|x|<|y|$，由(1)有

$$\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|\geqslant\eta(\varepsilon),$$

从而

$$\left|\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}\right|<2(1-\delta(\eta(\varepsilon))).$$

$$\begin{aligned}|x+y|&\leqslant|x|\left(\left|\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}\right|+\left|\frac{y}{|y|}-\frac{y}{|x|}\right|\right)\\&\leqslant|x|\left(2-2\delta(\eta(\varepsilon))+\frac{y}{|x|}-1\right)\\&=|x|+|y|-2|x|\delta(\eta(\varepsilon))\\&\leqslant(1-C(r)\delta(\eta(\varepsilon)))(|x|+|y|).\\&=(1-\delta_0(\varepsilon))(|x|+|y|).\end{aligned}$$

其中 $\delta_0(\varepsilon)=C(r)\delta(\eta(\varepsilon))>0$。故

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=r|x+y|+(1-r)\|x+y\|\\&\leqslant r(1-\delta_0(\varepsilon))(|x|+|y|)+(1-r)(\|x\|+\|y\|).\\&=\|x\|+\|y\|-\delta_0(\varepsilon)(|x|+|y|).\\&\leqslant(1-\delta_0(\varepsilon))\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|$ 是一致凸范数。证毕。

§5 Tsirelson (希里森)空间

1974 年 B.S. Tsirelson 构造了 Banach 空间 T，使 T 是自反的、具无条件基，$l_p\not\hookrightarrow T$，$1<p<+\infty$，且 T 没有超自反无限维子空间(X 称为超自反，如果 $X\approx$一致凸空间)。下面构造的 T 空间

实际上是原始的 Tsirelson 空间的共轭空间。它使用起来较方便(仍记作空间 T)。

Tsirelson 空间构造如下:

(a) 对自然数集 N 的非空有限子集 E, F, 现约定 $E\leqslant F$ 为 $\max E\leqslant \min F$. $E<F$ 为 $\max E< \min F$.

(b) $R^N=\{(x_i)_{i=1}^{\infty}; x_i\in R^1$, 且 (x_i) 仅有限项不为 $0\}$. 令 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ 表示 R^1 中单位向量,即 $t_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, 对任意
项 n 第

$$x=\sum_n a_n t_n\in R^N,$$

任何 $E\geqslant 1$.

$$Ex=\sum_{n\in E} a_n x_n.$$

(c) 在 R^N 上归纳定义范数序列 $(\|\cdot\|_m)_{m=0}^{\infty}$ 如下:

$$x=\sum_n a_n t_n\in R^N,$$

$$\|x\|_0=\max_n |a_n|,$$

$$\|x\|_{m+1}=\max\left(\|x\|_m, \frac{1}{2}\max\left(\sum_{j=1}^{k}\|E_j\|_m\right)\right\}, \quad m\geqslant 0,$$

其中括号中 max 取自 N 的有限子集 $(E_j)_{j=1}^{k}$, 满足 $k\leqslant E_1<\cdots<E_k$.

(d) 容易看到 $\|\cdot\|_m$ 是 R^N 上范数,且它们随 m 增加,并且

$$\|x\|_m\leqslant\sum_n |a_n|, \quad \forall x=\sum_n a_n t_n\in R^N.$$

故对每个 $x\in R^N$

$$\lim_m \|x\|_m=\|x\|$$

存在,

$$\max_n |a_n|\leqslant\|x\|\leqslant\Sigma|a_n|, (x=\Sigma a_n t_n).$$

$\|\cdot\|$ 是 R^N 中范数。

(e) T 是 $(R^N,\|\cdot\|)$ 的完备化。(构造完毕)。

命题 6.5.1 (1) $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ 组成 T 的正规化 1-无条件基。

(2) 对每个 $x=\sum_n a_n t_n\in T$,

$$\|x\| = \max\left(\max_n |a_n|,\ \frac{1}{2}\sup_k \sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|\right),$$

其中上确界取自 N 的有限子集列 $(E_j)_{j=1}^{k}$，满足 $k \leqslant E_1 < \cdots < E_k$。

(3) 对任何 $k \in N$，任何 k 个正规化块元 $(y_k)_{i=1}^{k}$，

$$y_i = \sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} a_n t_n,\quad 1 \leqslant i \leqslant k,\ k-1 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_{k+1},$$

有

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |b_i| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{k} b_i y_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |b_i|,\quad \forall (b_i)_{i=1}^{k}.$$

证明 (1) 显然。

(2) 令

$$\rho(x) = \max\left(\max_n |a_n|, \frac{1}{2}\sup \sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|\right),$$

$$\forall x = \sum_n a_n t_n \in T.$$

易见 $\rho(x) \geqslant \|x\|$。

反之，若

$$\rho(x) = \max_n |a_n|,$$

则 $\rho(x) \leqslant \|x\|$，从而 $\rho(x) = \|x\|$；若

$$\rho(x) > \max_n |x_n|,$$

令

$$B(x) = 2^{-1}\sup \sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|,$$

则对任何 $\varepsilon > 0$，$\exists k$，及 $(E_i)_{i=1}^{k}$，使 $k \leqslant E_1 < \cdots < E_k$，且

$$2^{-1}\sum_{j=1}^{k} \|E_j x\| > B(x) - \varepsilon.$$

选 m，使对 $1 \leqslant i \leqslant k$，有

$$\|E_j x\|_{m+1} > \|E_j(x)\| - \frac{\varepsilon}{k},$$

从而

$$\|x\| \geqslant \left\|\sum_{j=1}^{k} E_j x\right\| \geqslant \left\|\sum_{j=1}^{k} E_j x\right\|_{m+2} \geqslant 2^{-1}\sum_{j=1}^{k} \|E_j x\|_{m+1}$$

$$>2^{-1}\sum_{j=1}^{k}\|E_j x\|-\varepsilon>B(x)-\varepsilon,$$

故 $\|x\|\geqslant B(x)$，从而 $\|x\|\geqslant\rho(x)$，故也有 $\|x\|=\rho(x)$。证毕。

(3) $\left\|\sum_{i=1}^{k} b_i y_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\|b_i y_i\|=\sum_{i=1}^{k}|b_i|$，

反之，由(2)，

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} b_i y_i\right\|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(\sum_{i=1}^{k} b_i y_i\right)\right\|,\quad\forall k\leqslant E_1<\cdots<E_k.$$

特别取 E_j，使

$$E_j\left(\sum_{i=1}^{k} b_i y_i\right)=b_j y_j,$$

故

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} b_i y_i\right\|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}|b_i|.$$

证毕。

命题 6.5.1 $l_1\not\subset_{\to}T$。

证明 若 $l_1\subset_{\to}T$，由 James 定理（定理 6.4.2）及 Bessaga-Pelczynski 基序列选择原理，可找到 (t_n) 的正规化 block 基 $(y_i)_{i=0}^{\infty}$，使 $\forall(b)_{i=0}^{\infty}\in l_1$，有

$$\frac{8}{9}\sum_{i=0}^{\infty}|b_i|\leqslant\left\|\sum_{i=0}^{\infty} b_i y_i\right\|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}|b_i|.$$

特别地，

$$\left\|y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} y_i\right\|\geqslant\frac{16}{9},\ r=1,2,\cdots.$$

任取 $k\leqslant E_1<E_2<\cdots<E_k$，令 $n_0=\max\ \mathrm{supp}\,(y_0)$，其中，

$$\mathrm{supp}\,(y_0)=\{i;\,y_{0,i}\neq 0,\ y_0=(y_{0,i})_{i=1}^{\infty}\}.$$

(1) 若 $k>n_0$，则

$$\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} y_i\right)\right\|=\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} y_i\right)\right\|$$

$$\leqslant 2\left\|\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} y_i\right\|\leqslant 2.$$

(2) 若 $k\leqslant n_0$，令

$A=\{i;\|E_j y_i\|\neq 0$, 至少二个 $j\}$,

$B=\{i;\|E_j y_i\|\neq 0$, 至多一个 $j\}$.

易见, A 至多 k 个元。故

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}y_i\right)\right\| &\leqslant \sum_{j=1}^{k}\|E_j y_0\|+\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(\sum_{i=1}^{r}y_r\right)\right\| \\ &\leqslant 2\|y_0\|+\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r}\|E_j y_i\| \\ &\leqslant 2\|y_0\|+\frac{1}{r}\left(\sum_{i\in A}\sum_{j=1}^{k}\|E_j y_i\|+\sum_{i\in B}\sum_{j=1}^{k}\|E_j y_i\|\right) \\ &\leqslant 2+\frac{1}{r}\left(2\sum_{i\in A}\|y_i\|+\sum_{i\in B}\|y_i\|\right) \\ &\leqslant 2+\frac{1}{r}(2k+r-k)\leqslant 3+kr\leqslant 3+\frac{n_0}{r}.\end{aligned}$$

所以当 $r\geqslant 2n_0$ 时, 总有

$$\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}y_i\right)\right\|\leqslant\frac{7}{2}.$$

由命题 6.5.1,

$$\left\|y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}y_i\right\|=\frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^{k}\left\|E_j\left(y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}y_i\right\|\right.,$$

故

$$\left\|y_0+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}y_i\right\|\leqslant\frac{7}{4}.$$

当 $r\geqslant 2n_0$ 时, 矛盾! 证毕.

命题 6.5.3 $c_0, l_p \not\subset\!\!\to T$, $1<p<+\infty$.

证明 若 $c_0, l_p \subset\!\!\to T$, $1<p<+\infty$. 应用Bessaga-Pelczynski基序列选择原理(此时 $c_0, l_p(1<p<+\infty)$ 的自然基 $e_n \xrightarrow{w} 0$, 考虑 $(Te_n)_{n=1}^{\infty}$ 有 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, 的正规化 block $(u_i)_{i=1}^{\infty}$, 使

$$(e_n)\approx(e_{n_i})\approx(x_{n_i})\approx(u_i)$$

(转到子序列, 不妨假设

$$i<\operatorname{supp}u_i\equiv\{n; u_{i,n}\neq 0, u_i=(u_{in})\}).$$

由命题 6.5.1(3)由立即得到矛盾! 证毕.

命题 6.5.4 T 没有无限维超自反子空间。

证明 由 Bessaga-Pelczynski 基序列选择原理，T 的每个无限维子空间，有一个空间 $(1+\varepsilon)$ 线性同胚于 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ 的正规化block基序列 (y_n) 张成的子空间。如要转到子序列，可设 $n<\mathrm{supp}(y_n)$。由命题 6.5.1(3)知

$$\frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{2n}|a_i|\leqslant\left\|\sum_{i=n+1}^{2n}a_i y_i\right\|\leqslant\sum_{i=n+1}^{2n}|a_i|,\ \forall (a_i)_{i=n+1}^{2n}.$$

故 l_1^n 可一致嵌入 Y，故 Y 不 B 凸，从而 Y 不是超自反(注：超自反 $\Longrightarrow B$ 凸)。证毕。

总结上述得到

定理 6.5.5 Tsirelson 空间具有如下性质：

(1) T 是自反的；

(2) T 具 1 无条件基；

(3) $c_0, l_p(1\leqslant p<+\infty)\not\subset_{\rightarrow} T$；

(4) T 没有无限维超自反子空间。

注 修改 Tsirelson 空间定义可得到 Tsirelson 型一致凸空间，仍有 $c_0, l_p(1\leqslant p<+\infty)$ 不可嵌入。□

Tsirelson 型空间专门研究见(Ca-1)。它有极其丰富内容。解决了下列问题：

(1) Banach 问题：是否每个(无限维) Banach 空间或者含 c_0，或者含 l_p，$(1\leqslant p<+\infty)$。(否定)

(2) X 是一致凸的 $\overset{?}{\Longrightarrow} l_p(1<p<+\infty)\subset_{\rightarrow} X$。(否定)

(3) X 具对称基 $\overset{?}{\Longrightarrow} l_p(1<p<+\infty)\subset_{\rightarrow} X$。(否定)

(3) 如果 X 的每个空间具 AP $\overset{?}{\Longrightarrow} X\approx l_2$。(否定) (Banach 空间 X 称为具 AP，如果任何紧算子 T：$Y\longrightarrow X$ 可用有限秩算子逼近，其中 Y 为任何 Banach 空间。

(5) 是否每个无限维 Banach空间含一个极小子空间？(否定) (Banah 空间 X 称为极小的，如果对任何 Banach 空间 Y，使 $Y\subset_{\rightarrow} X$，有 $X\subset_{\rightarrow} Y$)。

6. 自反充分$\overset{?}{\Longrightarrow}$ Euclid。(否定)。(Banach 空间 X 称为充分 Euclid，如果对每个 n，存在 $E_n \subset X$，$\dim E_n = n$，和投影 P_n: $X \longrightarrow E_n$，使 $\sup \|P_n\| < +\infty$)。

(7) wHilbert 空间 Hilbert 空间。(否定)。(Banach 空间 X 称为 wHilbert 空间，如果存在 $C>0$，使对任何 n 维空间 $E_n \subset X$，存在 E_n 中两个椭圆 D_1、D_2 使 $D_1 \subset U(E) \subset D_2$，且

$$\left(\left(\frac{\mathrm{Vol} D_2}{\mathrm{Vol} D_1}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant C\right).$$

(8) 是否存在自反空间 X，使

$$X \overset{K}{\approx} \left(\sum_{i=1}^{n} \oplus X\right)_1, \forall n.$$

(肯定)。

(9) 是否存在 Banach 空间 X，使 X 上全纯函数全体 $H(X)$ 是自反的。(肯定)。(注：c_0, l_p 不成立)。

(10) 是否存在 Banach 空间 X，使任何 f: $[0,1] \longrightarrow X$ 的函数，f 是 Riemann 可积$\Longleftrightarrow f$ a.e 连续(肯定)。(注：c_0，$l_p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$不成立)。

第六章　参考文献

(A-D-R-1) R.M.Aron, J.Diestel & A.K.Rajappa Weakly continuous functions on Banach space containing l_1. Lecture Notes in Math. 1166 Springer-Vergal(1985) 1~3.

(As-1) D.E. Aslpach Quetients of c_0 are almost isometric to subspaces of c_0. Proc. A. M. S. 76. no.2(1979)285~288.

(A-H-1) P.Azimi & J.N.Hagler Examples of hereditarily l^1 Banach spaces failing the Schur property. Pacific J. Math. 122. no.2(1986)287~297.

(Be-1) B. Beauzamy Introduction to operator theory andinvariant subspace. North-Holland Math. libaray. 1988.

(B-L-1) R.G.Bilyeu & P.W. Lewis Uniform differentiabillity, compactness and l_1. Proc, A. M. S. 97. no.1(1986)87～92

(B-F-T-1) J. Bourgain, D. Fremlim & M. Talagrand Pointwise compact sets of Baire measurable functions. Amer J. Math. 100(1978)845～886.

(B-R-1) J. Bourgain & H.P.Rosenthal Applications of the theory of semi-embeddings to Banach spaces theory. J.Fun. Ann.52(1983)149～188.

(B-D-1) J. Bourgain & Delbean A class of special $\mathscr{L}_\infty$ spaces. Acta Math.145(1981)155～176.

(Bo-1) J. Bourgain On separable spaces, universal for all separable reflexive spaces. Proc. A. M. S. 79. no. 2 (1982)241～246.

(Bo-2) J.Bourgain m/c_0 has not equivalent strictly convex norm. Proc. A.M.S.78,no.2(1980)225-226.

(B-S-1) A. Brunel & L. Sucheston On B convex Banach spaces. Math.Systerms Theory.7,no.4(1973)294-299.

(Ca-S-1) P. G. Casazza & T.J. Shura Tsirelson's space. Lecture Notes in Math.1363.Springer-Verlag(1989).

(Co-1) J. B. Collier The dual of a space with the Radon-Nikodym property. Pacific. J. Math. 64. (1976) 103-106.

(Di-1) J. Diestel A survey of results related to the Dunford-Pettis property. Proc.Conf.on Integration, Topology and Geometry in Linear spaces. Amer. Math. S.

Contemp. Math. 2(1980).15～60.

〈Du-1〉 D. van Dulst Characterizations of Banach spaces not containing l_1. CWI.Tract 59(1989)(Netherlands).

〈D-S-1〉 Dunford & Schwartz Linear operators I.Interscience publishers. New York-London(1958).

〈E-W-1〉 G.A. Eadgar & R. F. Wheeler Topological properties of Banach spaces. Pacific.J.Math. 115.no.2 (1984)317～350.

〈E-1〉 J. Elton Extremely weakly unconditionally Convergent series. Israel J.Math 40(1981)255～258.

〈Em-1〉 G. Emmanuele A dual characterization of Banach spaces not Containing l_1. Bull. Pol Acad. Sci. 34(3-4) (1986)155～160.

〈Fi-1〉 C. Finet Subspaces of Asplund Banach spachs with the point continuity property. Israel J. Math. 60.no.2 (1987)191～198

〈F-1〉 V. Fonf One property of Lindenstrauss-Phelps spaces. Func. Ann. Appl. (English Trans.) 1B(1979) 66～67.

〈F-2〉 V. Fonf Спаъо экстремальные свойства Banach пространств.Math. Заметки.145. no.6(1989)83-92.

〈G-1〉 Godefroy Espaces de Banach Existence et unicité de certains préduaux Applications. Ann Inst. Fourier Grenoble. T18. (1978)87-105.

〈Gr-1〉 A. Grothendieck Une caracterisation vectorielle metrique des espacs L^1. Canad.J. Math. 7(1955)552～561.

〈H-J-1〉 J. Hagler & W. B. Johnson On Banach space whose dual ball are not w^* sequentiality compact.Israel

J. Math. 28 no.4(1977)325~330.

(K-F-2) N. I. Kadec & V.P. Fonf Subspaces of l_1 with strictly Convex norm. Math Notes. 33(1983).213-215.

(Ko-1) G. K the Hebbave lokalkonvexe R ume Math.Ann. 165(1966),181-195.

(Ke-1) J. L. Kelley Banach spaces with the extension property. Trans. A.M.S. 72(1952)323~326.

(Kv-1) J. L. Krivine Sur la constante de Grothendieck. C.R. Acad Sci Paris Ser A 284(1977)445~446.

(Ki-1) S.V.Kisliakov On spaces with"small"annihilator. In studies in Linear operators and theory of functions. Seminar Leningrad Math. Inst Vol.7(1976)192-195

(Kw-1) S. Kwapien On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. Studia Math. 38(1970)193~201.

(Kw-2) S. Kwapien Sur les espaces de Banach contenant co.Studia Math. 52(1974)187~188.

(L-Ph-1) D.G. Lanman & R.R.Phelps Gateaux differentiabillity of convex functions on Banach spaces. J. London Math. S. 2. no.20(1979)115~127.

(K-J-1) H. K nig & N. Tomezak-Jaegermann Bounds for projection constants and 1-summing norms (printed, 1988).

(L-Pe-1) J. Lindenstrauss & A. Pelczynski Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$ spaces and their applications. Studia Math 28(1968)275-326.

(Na-1) I. Namioka Neighborhoods of extreme points. Israel J. Math 5(1967)145~152

(N-1) L.Nachbin A theorem of the Hahn Banach type for

linear transformations. Trans. A.M.S.68(1950)28～46

(O-1) E.Odell Applications of Ramsey theorems to Banach space theory.Lo nghorn Notes. Univ. of Texas,Austin (1980)379～404.

(Pa-1) J. R. Partington Equivalent norm on spaces of bounded functions. Israel J. Math.35 no.3(1980)205～209.

(Pe-1) A. Pelczynski On $C(S)$ subspaces of separable Banach space, Studia Math. 31(1968)513～522.

(Pi-1) G.Pisiev Grothendieck's theorem for non-commutative C^*-Algebras with an appendix on Grothendieck's constants. J. Fun. Anal. 29(1978)397～415.

(P-1) R. Phelps Lecture Notes on Choquet' s theorem. D. van Nostrand Company INC1966.

(Ro-1) H. P. Rosenthal Pointwise compact subset of the first Baire class.Amer J. Math. 99.no.2. (1977)362～378.

(S-1) L.Schwartz Probilities cylindriques et applications radonifiantes. C. R. Acad Paris 268(1969)646～648.

(St-1) C.Stegall Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property. Notices A.M. S. 19 no.7 (1972)A-799.

(Ta-1) M.Talagrand Pettis integral and measure theory. Memoirs A.M.S. No.37(1984).

(Z-1) M. Zippin The separable extension problem. Isreal J. Math. 26(1977)372～387.

附　录　I

在这个附录中，我们证明下述 Day 定理。

定理(Day)　每个 Abel 半群是顺从(Amenble)半群。

首先回顾 Browder 不动点定理。

定理 (Browder 不动点定理)　若拓扑空间 Ω 同胚于 $U(l_2^n)$，则 Ω 到自身的连续映象 F 具不动点，即存在 $\omega\in\Omega$，使

$$F(\omega)=\omega.$$

1930 年 Schauder 将 Browder 不动点定理推广到赋范空间的紧凸子集情况。事实上，我们有下面更一般的 Tyhonov 不动点定理(1935)。

定理(Tyhonov 不动点定理)　令 K 是局部凸线性拓扑空间 L 的紧凸子集。F: $K\longrightarrow K$ 是连续映象，则 F 在 K 中具有不动点。

证明　证明方法乃是一种有限维逼近方法。

由于 F 是紧集上的连续映象，故 F 是一致连续的，即对 0 点的每个均衡凸邻域 W，存在 0 点的均衡凸邻域 V，使 $V\subset W$，且当 $x,x'\in K$, $x-x'\in V$ 时，有 $F(x)-F(x')\in W$。

令 $\mathscr{U}=\{W;W$ 是 0 点均衡凸邻域$\}$，$\mathscr{U}$ 按包含关系定向。

任取 $W\in\mathscr{U}$，考虑一致连续性中相应的 $V\in\mathscr{U}$，由 K 是紧的，故存在 $(x_1,\cdots,x_n)\subset K$，使 $K\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i+V)$。

令 $K_W=\mathrm{co}(x_i)_{i=1}^n$，则 K_W 同胚于 l_2^n 的一个多面体，故 K 可分成两两不相交的开单纯形 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$，使得每个 σ_j, $1\leqslant j\leqslant m$，被含于某个 x_i+V, $1\leqslant i\leqslant n$。

下面定义 F_W:$K_W\longrightarrow K_W$ 如下：设 y 是 σ_j 的一个顶点，定义 $F_W(y)\in K_W$，使 $F(y)-F_W(y)\in V$，如果 $x\in K_W$，则 $x\in\sigma_j$，对某个 j, $1\leqslant j\leqslant m$。设 $(y_1,\cdots,y_l)$ 是 σ_j的顶点，则

$$x=\sum_{i=1}^{l}a_i y_i,$$

其中 $a_i\geqslant 0$，且$\sum_{i=1}^{l}a_i=1$。令

$$F_W(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i F_W(y_i).$$

容易看到 F_U 是连续的，且当 $x\in K_W$ 时，$F_W(x)-F(x)\in 3W$。

由 Browder 不动点定理，存在 $p_W\in K_W$，使 $F_W(p_W)=p_W$。

由于 $(p_W)_{W\in\mathscr{W}}\subset K$，且 K 是紧的，故存在子 net(p_{W_α})，使 $p_{W_\alpha}\longrightarrow p\in K$。我们说 $F(p)=p$。事实上，任取 0 点的均衡凸邻域 U，由于

$$F(p)-p=F(p)-F(p_{W_\alpha})+F(p_{W_\alpha})-F_{W_\alpha}(p_{W_\alpha})$$
$$+p_{W_\alpha}-p\in F(p)-F(p_{W_\alpha})+3W_\alpha+p_{W_\alpha}-p.$$

考虑到 $p_{W_\alpha}\longrightarrow p$，及 $F(p_{W_\alpha})\longrightarrow F(p)$，因此存在 α_0，使得当 $\alpha>\alpha_0$ 时，有 $F(p)-p\in U+3W_\alpha+U$，再取 $\alpha_1>\alpha_0$，使

$$3W_{\alpha_1}\subset U,$$

则

$$F(p)-p\in U+3W_{\alpha_1}+U\subset 3U.$$

由 U 的任意性，即知 $F(p)=p$。证毕

定理(Markov 不动点定理) 设 K 是局部线性拓扑空间 L 中紧凸子集，$(F_s)_{s\in S}$ 是一族 K 到自身的连续可换仿射映象，则 (F_s) 具共同不动点。

注：F_s 称为仿射的，如果对 $x,\ y\in K$，$0<t<1$，有

$$F_s(tx+(1-t)y)=tF_s(x)+(1-t)F_s(y). \quad \square$$

证明 令 K_s 是 F_s 的不动点集，由 Tyhonov 不动点定理，每个 K_s 是非空的。F_s 的仿射性保证 K_s 是凸的。由 F_s 的连续性得出 K_s 是闭的。

对任 $s_1,s_2\in S$，$K_{s_1}\cap K_{s_2}\neq\Phi$。事实上，因 K_{s_1} 为紧凸集，且 $F_{s_2}K_{s_1}=F_{s_2}F_{s_1}K_{s_1}=F_{s_1}F_{s_2}K_{s_1}$，故 $F_{s_2}K_{s_1}\subset K_{s_1}$，再应用 Tyhonov 定理，有 $x\in K_{s_1}$，使 $F_{s_2}x=x$，从而 $x\in K_{s_2}$，因此，$K_{s_1}\cap K_{s_2}\neq\Phi$。归

纳地可证明$\bigcap\limits_{i=1}^{n} K_{s_i}\neq\Phi$，由于K是紧集，故$\bigcap\limits_{s\in S}K_s\neq\Phi$。证毕。

下面我们再引入若干记号及定义。

设Σ是一个集合。$m(\Sigma)$表示Σ上一切有界函数按照范数$\|f\|=\sup\{|f(a)|;a\in\Sigma\}$组成的Banach空间。

定义1.1 若Σ是一个集合。X是$m(\Sigma)$的线性子空间，且X含有恒等于1的函数e。X上的一个平均μ指的是$\mu\in m(\Sigma)^*$，且

$$\inf\{x(a)a\in\Sigma\}\leqslant\mu(x)\leqslant\sup\{x(a);a\in\Sigma\},\forall x\in X。$$

注 若记$M=\{\mu;\ \mu$是X上的平均$\}$，则易见M是赋值泛函$\{\delta_a;a\in\Sigma\}$的ω^*闭凸包，其中$\delta_a(x)=x(a),\forall x\in X$。□

定义1.2 若Σ是一个半群，由$\sigma\in\Sigma$决定的$m(\Sigma)$中的左(右)平移l_σ(分别地，r_σ)指的是对一切$x\in\Sigma$，$(l_\sigma x)(\tau)=x(\sigma\tau)$(分别地，$(r_\sigma x)(\tau)=x(\tau\sigma)$)，$\forall\tau\in\Sigma$。$m(\Sigma)$的子空间$X$上的一个平均$\mu$称为左(右)不变平均，如果对每个$\sigma\in\Sigma$，$l_\sigma(X)\subset X$(分别地，$r_\sigma(X)\subset X$)，且$l_\sigma^*\mu=\mu$(分别地，$r_\sigma^*\mu=\mu$)，其中$l_\sigma^*$，$r_\sigma^*$表示$l_\sigma$，$r_\sigma$的共轭算子。半群$\Sigma$称为左(右)顺从(Amenable)，如果$m(\Sigma)$上至少存在一个左(分别地，右)不变平均。既是左顺从又是右顺从的半群，称为顺从半群。

定理(Day) 每个Abel半群是顺从半群。

证明 设A是Abel半群。令$M=\{\mu;\ \mu$是$m(A)$上的一个平均$\}$。由定义1.1的注知，M是$m(A)^*$中的w^*紧凸集。对每个$\sigma\in A$，$\tau\in A$，$l_\sigma^*|_M;M\longrightarrow M$。是$w^*-w^*$连续仿射的，且$(l_\sigma^*|_M)(l_\tau^*|_M)=(l_\tau^*|_M)(l_\sigma^*|_M)$。应用Markov不动点定理，$(l_\sigma^*|_M,\sigma\in A)$有共同的不动点$\mu$。即$l_\sigma^*\mu=\mu$，$\forall\sigma\in A$。故$A$是顺从半群。证毕。

注 Day定理表明Abel半群A上必存在$m(A)^*$中元μ，使

(1) $\|\mu\|=1$；

(2) $\mu(e)=1$，其中e为恒等于1的函数。

(3) $\inf\{x(a); a\in A\}\leqslant\mu(x)\leqslant\sup\{x(a); a\in A\}, \forall x\in m(A)$。

(4) $\mu(x)=\mu(x_\sigma), \forall\sigma\in A, x\in m(A)$，其中

$$x_\sigma(\tau)=x(\sigma\tau)=x(\tau\sigma), \forall\tau\in A。\square$$

附　录　II

本附录叙述 Banach 空间中基、基序列、无条件基、对称基和次对称基的概念。还给出基序列存在性、基序列选择原理等一些重要且有用的基本定理。

定义 2.1　设 X 是 Banach 空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个序列。若对 X 的每个元，存在唯一数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$，其中级数按范数收敛，则称 $\{x_n\}$ 为 X 的一个 Schauder 基（简称为基），而 X 称为具 Schauder 基（简称具基）的 Banach 空间。a_n 称为 x 关于基 $\{x_n\}$ 的第 n 个坐标。X 的一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 X 的基序列，如果 $\{x_n\}$ 是它的闭线性张 $[x_i]_{i=1}^{\infty}$ 的基。

在一个具基 $\{x_n\}$ 的 Banach 空间 X 中，如果把每个

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\in X$$

与唯一的数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 看作一样的话，那么，X 可考虑为一个序列空间。因此，一旦 Banach 空间 X 具有基的话，那么就可较"直观地"进行讨论。

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的基，对每个 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\in X$，令

$$|||x|||=\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right\|,$$

显然 $|||\cdot|||$ 是 X 上一个范数，且 $\|x\|\leqslant|||x|||$，$\forall x\in X$。容易证明 $(X, |||\cdot|||)$ 是完备的（实际上可仿照 l_p 是完备的进行证明）。由 Banach 逆算子定理即知 $\|\cdot\|$ 与 $|||\cdot|||$ 等价。
于是，我们有

定理 2.1　设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的基，令 $P_n: X\longrightarrow X$，$P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$，则 P_n 是投影，且

$$\sup_n \|P_n\| < +\infty.$$

定义 2.2 定理 2.1 中的 $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为关于基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的自然投影。$\sup_n \|P_n\|$ 称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数，基常数为 1 的基称为单调基。

容易看到，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于$\left(X, \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| = \sup_n \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right)$是单调基。这表明对任何具基的 Banach 空间可再赋等价范，使这个基在新范数下是单调基。由此也可证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相应的坐标泛函 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$，其中

$$x_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n, \ \forall \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X.$$

如下判断基的准则是常用的。

定理 2.2 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的基当且仅当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足下列条件

(1) $x_n \neq 0, \forall n$;

(2) 存在常数 K，使对任数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，$n < m$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|;$$

(3) $[x_i]_{i=1}^{\infty} = X$.

证明 "$\Longrightarrow$" (1)、(3) 显然。令 $K = \sup_n \|P_n\|$，对任何数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，$n < m$，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left\|P_n \sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|,$$

即(2)成立。

"$\Longleftarrow$" 若$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$，则由(1)、(2)及归纳法知，$a = 0, \forall i$。又由于 $X = [x_n]_{n=1}^{\infty}$，故只须

$$B = \left\{x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i < +\infty\right\}$$

是 X 的闭子空间，就知道 X 中每个元可唯一地表成 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ 形式，从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的基。

在 B 中引入新范数

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|,$$

易见 $(B, \|\cdot\|)$ 是完备的。从而 B 是 $(X, \|\cdot\|)$ 的闭子空间。证毕。

注 易见定理中条件(1)、(2)是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 成为基序列的充分必要条件。

值得注意的是，如果条件(2)中 $K=1$，则条件(2)等价于

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \right\|, \ \forall n。\ \square$$

我们称基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正规化的，如果 $\|x_n\| = 1$, $\forall n$。显然，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为基，则 $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$ 为正规化基。

Enflo 反例否定地回答了长期以来Open 的一个 Banach 提出的问题：是否每个可分 Banach 空间具有基？现已证明 l_p, $1 \leqslant p < +\infty$, c_0 均有子空间不具基。并且知道，除非 Banach 空间 X "非常接近" Hilbert 空间，则 X 一定有一个没有基的子空间。这个子空间甚至不具有更弱的 CAP 性质。

注 Banach 空间 X 称为具 AP，如果对每个 $\varepsilon > 0$，每个紧集 $K \subset X$，存在有限秩算子 $T \in L(X, X)$，使

$$\sup\{\|Tx - x\|; x \in K\} < \varepsilon.$$

Banach 空间 X 称为具 CAP，如对每个 $\varepsilon > 0$，每个紧集 $K \subset X$，存在紧算子 $T \in L(X, X)$ 使

$$\sup\{\|Tx - x\|; x \in K\} < \varepsilon.$$

易证 X 具基 $\Longrightarrow X$ 具 AP $\Longrightarrow X$ 具 CAP。$\square$

但是 Johnson 也构造一个 Banach 空间 X，它的一切子空间具 AP，但 $X \not\cong$ Hilbert 空间（见 W.B.Johnson Special topics of Applied Math. (1980) 15～26）。

定理 2.3 每个无限维 Banach 空间包含一个基序列。

这个定理的证明基于下面的 Mazur 定理。

定理 2.4 (Mazur) 设 X 是无限维 Banach 空间，B 是 X 的有限维子空间，$\varepsilon>0$，则存在 $x\in S(X)$，使

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|,\ \forall y\in B,\ \text{数}\ \lambda.$$

证明 不妨设 $\varepsilon<1$。令 $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ 是 $S(B)$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网，选

$$\{y_i^*\}_{i=1}^{m}\subset S(X^*),$$

使 $y_i^*(y_i)=1$，$1\leqslant i\leqslant m$。由于 X 是无限维 Banach 空间，故 $\exists x_0\in S(X)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}{}^{\perp}\ y_i^*\right)$，则对任 $y\in S(B)$，存在 y_i，$1\leqslant i\leqslant m$，使

$$\|y_i-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

对任何数 λ，

$$\|y+\lambda x_0\|\geqslant\|y_i+\lambda x\|-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant y_i^*(y_i+\lambda x)-\frac{\varepsilon}{2}$$
$$=1-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\|y\|,$$

从而

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon)\|y+\lambda x_0\|,\ \forall y\in B,\ \text{数}\ \lambda.$$

证毕。

注 如果我们规定 $x\perp B$ 为 $\|y\|\leqslant\|y+\lambda x\|$，$\forall y\in B$，数 λ。那末当 X 是 Hilbert 空间时，$x\perp B$ 等价于 $(x,y)=0$，$\forall y\in B$，即 x 与 B 正交。因此当 X 是 Hilbert 空间时，定理 2.4 就是 Hilbert 空间的每个子空间具正交补的简单推论、在一般Banach空间中，有限维子空间是可补的（见定理 1.1.6），但未必有这种“正交性”。Mazur 定理说的是一定可找到一个向量 x 与有限维子空间“接近正交”。另外需要注意的是，对 $y\in X$，我们也记 $x\perp[y]$ 为 $x\perp y$。但这个正交不具对称性，即 $x\perp y\not\Longrightarrow y\perp x$。可以证明，若正交是对称的当且仅当 X 是 Hiblert 空间。这些表明希望把 Hilbert 空

间中的许多想法直接转到一般的 Banach 空间常常是不理想的。□

定理 2.3 的证明　令 $\varepsilon>0$，取 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\varepsilon_n>0$ 且

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)<1+\varepsilon.$$

令 $x_1\in S(X)$，由定理 2.4 可归纳构造 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，使得对每个 n，

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon_n)\|y+\lambda_n\|,\ \forall y\in[x_i]_{i=1}^{n-1},\ 数\ \lambda.$$

易见 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列，特别地，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数 $\leqslant 1+\varepsilon$。证毕。

下面定理是很有用的。

定理 2.5 (Bessaga-Pelczynski 基序列选择原理)　如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\underline{\lim}\|x_n\|>0$，$x_n\xrightarrow{w}0$，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是具基常数 $<1+\varepsilon$ 的基序列。

证明　如果必要转到子序列，并考虑 $\frac{x_n}{\|x_n\|}$，不妨设 $\|x_n\|=1$，$\forall n$，且 $x_n\xrightarrow{w}0$。任取 $\varepsilon>0$，选 $\varepsilon_n>0$，使

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)<1+\varepsilon.$$

取 $[x_1]$ 的单位球面的 $\frac{\varepsilon_1}{2}$-网，选 $\{y_i^*\}_{i=1}^{m}\subset S(X^*)$，使

$$y_i^*(y_i)=1,\ 1\leqslant i\leqslant m.$$

由于 $x_n\xrightarrow{w}0$，故存在 x_{n_1} 使

$$|y_i^*(x_{n_1})|<\frac{\varepsilon_1}{4}.$$

我们有

$$\|y\|\leqslant(1+\varepsilon_1)\|y+\lambda x_{n_1}\|,\ \forall y\in[x_1],\ 数\ \lambda. \tag{2.1}$$

事实上，取 $y\in[x_1]$，$\|y\|=1$，分两种情况考虑：

(a) 当 $|\lambda|\geqslant 2$ 时，$\|y+\lambda x_{n_1}\|\geqslant|\lambda|-\|y\|\geqslant 1=\|y\|$，

(b) 当 $|\lambda|<2$ 时，选 y_i，$1\leqslant i\leqslant m$，使

$$\|y_i - y\| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

则

$$\|y + \lambda x_{n_1}\| \geq \|y_i + \lambda x_{n_1}\| - \frac{\varepsilon_1}{2} \geq y_i^* \ (y_i + \lambda x_{n_1}) - \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$> 1 - \frac{\varepsilon_1}{4} - \frac{\varepsilon_1}{2} > (1 - \varepsilon_1) \|y\| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \|y\|.$$

总之，(2.1)成立。

继续这个过程。从定理 2.4 证明立即得到所要的结论。证毕。

下面我们引入基等价的概念。

定义 2.8 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是 Banach 空间 X 和 Y 的基，称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价于 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n < +\infty$$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < +\infty \text{ 表示级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{收敛}\right)$，此时记作

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

注　由闭图象定理，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 当且仅当存在线性同胚 $T: X \longrightarrow Y$，使 $Tx_n = y_n$，$\forall n$。从而

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow X \approx Y. \ \square$$

我们看到基的微小扰动可得到等价基。事实上，我们有

定理 2.6 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的具基常数为 K 的基序列，令 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} < \frac{1}{2K},$$

则 $\{y_n\}$ 是基序列，且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$。

证明　令 $\lambda = 2K \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|}$，则 $\lambda < 1$。

对任 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$，

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \right|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-y_i)\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\|x_i-y_i\|}{\|x_i\|}\cdot\|a_ix_i\|$$

$$\leqslant\left(2K\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|x_i-y_i\|}{\|x_i\|}\right)\cdot\left\|\sum_{n=1}^{n}a_ix_i\right\|=\lambda\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|$$

故

$$(1-\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right\|\leqslant(1+\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|,\quad(2.2)$$

由(2.2)得，对任 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，$n<m$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right\|\leqslant(1+\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|\leqslant(1+\lambda)K\left\|\sum_{i=1}^{m}a_ix_i\right\|$$

$$\leqslant(1-\lambda)^{-1}(1+\lambda)K\left\|\sum_{i=1}^{m}a_iy_i\right\|.$$

因此 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列，且由(2.2)知

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n<+\infty\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n<+\infty,$$

故

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{y_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

证毕。

为了得到可补的具基的子空间，我们要应用下面定理。

定理 2.7 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的具基常数为 K 的基序列，假设存在投影 $P: X\longrightarrow[x_n]_{n=1}^{\infty}$（即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可补的具基的子空间），$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x_n-y_n\|}{\|x_n\|}\leqslant\frac{1}{8K\|P\|}$$

则 $[y_n]_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中可补。

证明 由定理 2.6 知 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列。且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，令 T:

$$[x_n]_{n=1}^{\infty}\longrightarrow[y_n]_{n=1}^{\infty}\quad T\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n,$$

则

$$\|x-Tx\|\leqslant2K\|x\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x_n-y_n\|}{\|x_n\|}\leqslant\frac{1}{4}\|x\|,\ \forall x\in[x_n]_{n=1}^{\infty}.$$

$$\frac{1}{2}\|x\|<\|x\|-\|x-Tx\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\|x\|+\|x-Tx\|\leqslant\frac{5}{4}\|x\|.$$

特别地，$\|T\|<2$。令

$$\delta=4\|T\|\cdot K\|P\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|x_n-y_n\|}{\|x_n\|},$$

则 $\delta<1$，且对任

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n\in[y_n]_{n=1}^{\infty},$$

有

$$T^{-1}y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\in[x_n]_{n=1}^{\infty},$$

且

$$\|TPy-y\|\leqslant\|T\|\cdot\|P\|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot\|x_n-y_n\|\leqslant\delta\|y\|.$$

故 $S=TP|_Y$ 是 Y 上一个可逆算子，其中 $Y=[y_n]_{n=1}^{\infty}$。容易看到 $S^{-1}TP$: $X\longrightarrow Y$ 是投影。故 $[y_n]_{n=1}^{\infty}$ 是具基的可补子空间。证毕。

由基或基序列得到新的基序列的一种通常方法是如下“块基方法”。

定义 2.4 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的基序列，形式如下的非零向量

$$u_j=\sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}}a_nx_n,$$

(其中 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是数列，$p_1<p_2<\cdots$ 是自然数增加序列)组成的序列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基。

易见块基是基序列，且它的基常数不超过原来的基常数。

在具基的 Banach 空间，有比定理 2.3 更强的结果。

定理 2.6 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的基，Y 是 X 的一个无限维子空间，则存在 Y 的一个子空间 Z，具有一个基与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的某个块基等价。

证明　由于 Y 是无限维的，故对每个正整数 p，存在 $y\in S(Y)$，

使 $y=\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n x_n$。

下面归纳构造 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$。令 K 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数。取

$$y_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^1 x_n\in S(Y),$$

令 p_1 是一个正整数,使

$$\|y_1-u_1\|<\frac{1}{8.4K},$$

其中

$$u_1=\sum_{n=1}^{p_1}a_n^1 x_n.$$

取

$$y_2=\sum_{n=p_1+1}^{\infty}a_n^2 x_n\in S(Y),$$

再取 $p_2>p_1$, 使

$$\|y_2-u_2\|<\frac{1}{8^2\cdot 4K},$$

其中 $u_2=\sum_{n=p_1+1}^{p_2}a_n^2 x_n$。

继续这个过程,得到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个块基 $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$,

$$|1-\|u_n\||\leqslant\|y_n-u_n\|\leqslant\frac{1}{8^n\cdot 4K},\ \left(\|u_n\|\geqslant\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|y_n-u_n\|}{\|u_n\|}\leqslant\frac{1}{2K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}<\frac{1}{4K}.$$

由定理 2.6 知 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\approx\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令 $Z=[y_n]_{n=1}^{\infty}$, 则 Y 的子空间 Z 即所求。证毕。

下面在具基的 Banach 空间中基选择原理也是很有用的。

定理 2.9 (Bessaga-Pelczynski 基序列选择原理) 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的基,

$$y_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k x_n,\ k\in N,$$

如果 $\underline{\lim}\|y_n\|>0$（或者 $\overline{\lim}\|y_n\|>0$）且 $\lim_k a_n^k=0$, $\forall n$,（特别地，如果 $y_n\xrightarrow{w}0$, 但 $\|y_n\|\not\to 0$），则存在 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{y_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, 使 $\{y_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ 等价于 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个块基。

证明　如果必要转到子序列，不妨假设 $\|y_n\|=1$。且

$$\lim_k a_n^k=0,\ \forall n.$$

令 K 是 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的基常数。

取正整数 p_1, 使

$$\|y_1-u_1\|<\frac{1}{8\cdot 4K}.$$

其中 $u_1=\sum_{n=1}^{p_1}a_n^1x_n$.

由于 $\lim_k a_n^k=0$, $\forall n$, 故存在 y_{n_2} 及 $p_2>p_1$, 使

$$\|y_{n_2}-u_{n_2}\|<\frac{1}{8^2 4K}.$$

其中

$$u_2=\sum_{n=p_1+1}^{p_2}a_n^{n_2}x_n.$$

继续这个过程，同定理 2.8 证明即得

$$\{y_{n_j}\}_{j=1}^\infty\approx\{u_n\}_{n=1}^\infty,$$

证毕。

关于基 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的相应坐标泛函 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$, 我们列举下面三个容易事实：

(1) $\|x_n^*\|\leqslant\frac{2K}{\|x_n\|}$, 其中 K 为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的基常数。

(2) $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是 X^* 的基序列，它的基常数 $\leqslant K$。

(3) 对任 $x^*\in X^*$, $x^*=w^*\sum x^*(x_n)x_n^*$. □

下面介绍无条件基的概念。为此，首先给出 Banach 空间中级数无条件收敛的一些等价条件。

定理 2.10　令 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Banach 空间 X 中一个序列，则

TFAE:

(1) 对正整数的每个置换 π，$\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}<+\infty$。

(2) (子级数收敛)对正整数的每个增加序列 $n_1<n_2<\cdots$，$\sum_{i=1}^{\infty}x_{n_i}<+\infty$。

(3) 对任意符号选取 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}(\theta_n=\pm1)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n x_n<+\infty$。

(4) 对每个 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 n，使对正整数的每个有限子集 σ，满足 $\min\{i; i\in\sigma\}>n$，有 $\|\sum_{i\in\sigma}x_i\|<\varepsilon$。

证明 (2)与(3)的等价是显然的。如果(4)成立，则(1)和(2)中级数的部分和满足 Cauchy 条件，从而收敛，于是，(4) $\Longrightarrow$ (1)，(4) $\Longrightarrow$ (2)。

假设(4)不成立，则存在 $\varepsilon>0$，及正整数的有限集的序列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$q_n=\max\{i; i\in\sigma_n\}<p_{n+1}=\min\{i; i\in\sigma_{n+1}\}.$$

且 $\|\sum_{i\in\sigma_n}x_i\|\geqslant\varepsilon$，$\forall i$，很清楚 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n$ 可排成自然数的增加序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}x_{n_i}$ 不收敛。故(2) $\Longrightarrow$ (4)。同样，如果这时取 π 为自然数的如下置换：π 将 $\{i; p_n\leqslant i\leqslant q_n\}$ 映为自身，并使

$$\pi^{-1}(\sigma_n)=\{p_n, p_{n+1}, \cdots, p_{n+k_n}\},$$

其中 k_n 为 σ_n 的基数，而 π 使 $\{i; q_{n+1}\leqslant i<p_{n+1}\}$ 保持不变，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}$ 不收敛。故(1) $\Longrightarrow$ (4)。证毕。

定义 2.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 满足定理 2.10 中任何一个条件，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 为无条件收敛$\left(\text{有时记为}\sum_{n=1}^{\infty}x_n \text{u.c}\right)$。

易见如果 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 无条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_{\pi(n)}$，$\forall$ 置换 π，

$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n x_n;\ \theta_n \pm 1\right\}$是紧集（考虑从$\{-1, 1\}^N$到$X$的映象$(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ $\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n x_n$，由条件(4)，这个映象是连续的)，且$T: l_\infty \longrightarrow X$，$T(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n$，$\forall (a_n)\in l_\infty$，是有界线性算子。

定义 2.6 Banach 空间X的基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$称为无条件基，如果对每个$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n \in X$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n$无条件收敛。

定理 2.11 基序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是无条件的，当且仅当下列条件之一成立。

(1) 对正整数的任何置换π，$\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$是基序列。

(2) 对正整数集的任何子集σ，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n < +\infty,$$

则

$$\sum_{n\in\sigma}a_n x_n < +\infty.$$

(3) 若$|b_n|\leqslant|a_n|$，$\forall n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n x_n < +\infty.$$

证明　由定理 2.10 直接得出。证毕。

由闭图象定理立即得到，如果$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是无条件基序列，σ是正整数集的子集，则存在定义在$[x_n]_{n=1}^{\infty}$上的投影P_σ：

$$P_\sigma\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\right)=\sum_{n\in\sigma}a_n x_n,\quad \forall \sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n \in [x_n]_{n=1}^{\infty}.$$

这些投影称为无条件基序列的自然投影（当$\sigma=\{1, \cdots, n\}$时，P_σ就是关于基序列的自然投影）。

类似地，对符号的每个选取$\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}(\theta_n=\pm1)$，存在定义在$[x_n]_{n=1}^{\infty}$上的投影$M_\theta$：

$$M_\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\theta_n x_n,\quad \forall \sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n \in [x_n]_{n=1}^{\infty}.$$

显然，如果 $\sigma=\{n; \theta_n=1\}$，则

$$P_\sigma=\frac{I+M_\theta}{2}.$$

若$\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\eta=\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$，规定$(\theta\eta)_n=\theta_n\cdot\eta_n$，$\theta\cdot\eta=\{(\theta\eta)_n\}_{n=1}^{\infty}$，则易见 $M_\theta\cdot M_\eta=M_{\theta\eta}$。

由一致有界原理，

$$\sup_\sigma\|P_\sigma\|<+\infty,\ \sup_\theta\|M_\theta\|<+\infty,$$

且

$$\sup_\sigma\|P_\sigma\|\leqslant\sup_\theta\|M_\theta\|\leqslant 2\sup_\sigma\|P_\sigma\|,$$

定义 2.7 $\sup_\theta\|M_\theta\|$ 称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的无条件基常数。

无条件基常数总大于等于基常数。

容易看到，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的无条件基，令

$$|||x|||=\sup_\theta\|M_\theta x\|,$$

则 $|||\cdot|||$ 是 X 上的等价范数，且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于$(X, |||\cdot|||)$的无条件基常数为 1，即任何具无条件基的 Banach 空间可以再赋范使无条件基常数在新范数下等于 1。

注意，无条件基序列的每个块基仍是无条件的，且块基的无条件基常数不超过原来的无条件基常数。无条件基的相应坐标泛函仍是无条件基序列，它的无条件基常数不超原来的无条件基常数。

对无条件基下面不等式是经常使用的。

定理 2.12 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是具无条件基常数为 K 的无条件基序列，则对任何有界数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\in[x_n]_{n=1}^{\infty}$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_na_nx\right\|\leqslant 2K\sup_n|\lambda_n|\cdot\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right\|.$$

注 在实的情况可用 K 代替 $2K$。□

证明 假设实的情况，取 $x^*\in S(X^*)$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x^*(x_n) = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\|,$$

令 $\theta = \{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$，当 $a_n x^*(x_n) \geqslant 0$ 时，$\theta_n = 1$，当 $a_n x^*(x_n) < 0$ 时，$\theta_n = -1$，则

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |a_n x^*(x_n)| \leqslant \sup_n |\lambda_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^*(x_n)|$$

$$\leqslant \sup_n |\lambda_n| x^* \left(M_\theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right)$$

$$\leqslant \sup_n |\lambda_n| \cdot K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

对复的情况，将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^*(x_n)$ 分成实部和虚部即可。证毕。

注　在定理条件下，我们经常使用如下形式不等式。

$$\frac{1}{2K\sup\limits_n |\lambda_n|} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\| \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|. \square$$

易见 c_0，l_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ 的自然基是无条件基，其中 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots)$，这里第 n 项为1，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为自然基。

下面介绍对称基和次对称基。

定义 2.8　Banach 空间 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为对称基，如果对正整数的任何置换 π，$\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty} \approx \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。

定理 2.11 表明基序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基当且仅当对正整数的任何置换 π，$\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是基序列，由此，即知对称基一定是无条件基。

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的对称基，则对正整数的每个置换 π，定义

$$V_\pi: X \longrightarrow X, V_\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{\pi(n)}.$$

显然，V_π 是X到自身的线性同胚，并且 $\sup\{\|V_\pi\|; \pi\} < +\infty$，事实上，否则，容易由一致有界原理得到

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X,$$

一个置换列 $\{\pi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 及正整数的有限集的序列 $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$，使

$$\sigma_j \cap \sigma_k = \Phi,$$

且

$$\pi_j(\sigma_j) \cap \pi_k(\sigma_k) = \Phi, (k \neq j),$$

且

$$\left\|\sum_{n \in \sigma_j} a_n x_{\pi(n)}\right\| \geqslant 1, \ \forall j,$$

现取置换 π_0，满足 $\pi_0(n) = \pi_{2j}(n)$，对 $n \in \sigma_{2j}$，$j = 1, 2, \cdots$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{\pi 0(n)}$ 发散，矛盾！

由此容易得到，

$K = \sup\{\|M_\theta V_\pi\| < +\infty; \theta = \{\theta_n\}(\theta_n = \pm 1), \pi$ 为置换$\}$。

（利用 $\{x_n\}$ 也是无条件的）。

定义 2.9 $K = \sup\{\|M_\theta V_\pi\|; \theta, \pi\}$ 称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的对称基常数。

显然，对称基常数大于等于无条件基常数。易见，如果取

$$\left\|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right|\right\| = \sup_{\theta=(\theta_n)} \sup_{\pi} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta_n x_{\pi(n)}\right\|,$$

则 $\|\|\cdot\|\|$ 是 X 上的等价范数，$\|x\| \leqslant \|\|x\|\| \leqslant K\|x\|$，$\forall x \in X$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $(X, \|\|\cdot\|\|)$ 的对称基常数等于 1，且

$$\left\|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right|\right\| = \left\|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta_n x_{\pi(n)}\right|\right\|, \ \forall \theta = (\theta_n)_{n=1}^{\infty}, \ \pi,$$

这样的范数称为对称范数。

定义 2.10 Banach 空间 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为次对称基，如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基，且对正整数的每个增加序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 有

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \approx \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

注　有例子表明，由定义中第二个条件不必得出 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无条件基。□

若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是次对称基，对自然数的每个增加序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$，定义

$$S_{\{n_i\}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} x_{n_i},$$

则也容易验证 $S_{\{n_i\}}$ 是 X 到 $[x_{n_i}]_{n=1}^{\infty}$ 的线性同胚，且

$$K=\sup\{\|M_\theta S_{\{n_i\}}\|;\ \theta=(\theta_n),\{n_i\}_{i=1}^{\infty}\}<+\infty。$$

定义 2.11 $K_1=\sup\{\|M_\theta S_{\{n_i\}}\|;\ \theta=(\theta_n),\{n_i\}_{i=1}^{\infty}\}$ 称为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的次对称基常数。

易见，令

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_0=\sup_{\theta=(\theta_n)}\sup_{\{n_i\}}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\theta_i x_{n_i}\right\|,$$

则 $\|\cdot\|_0$ 是 X 上的一个等价范数，

$$\|x\|\leqslant\|x\|_0\leqslant K_1\|x\|,$$

且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $\|\cdot\|_0$ 的次对称基常数为 1。同时，

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\theta_i x_{n_i}\right\|_0=\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_0,$$

这样的范数称为次对称范数。

虽然从定义中未见到对称基与次对称基的关系，但可证明：

定理 2.13 每个对称基是次对称基。

证明 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 的对称基，不妨设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的对称基常数是 1。

已知对称基一定是无条件基，故只须证

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\approx\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \forall\{n_i\},$$

只须证

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n<+\infty\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{n_i}<+\infty。$$

事实上，我们有

$$\left\|\sum_{n=1}^{k} a_i x_i\right\|=\left\|\sum_{n=1}^{k} a_i x_{n_i}\right\|,\ \forall k,(a_1,\cdots,a_k),$$

对 $n_1<n_2<\cdots n_k$ 定义一个置换 π，使

$$\pi(i)=n_i,\ 1\leqslant i\leqslant k。$$

从而，由对称基常数为 1 知，

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{\pi(i)}\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\right|,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{n_i} < +\infty.$$

证毕.

参考书目

(B-1) B. Beauzamy Introduction to Banach spaces and their geometry. North-Holland publishing company (1982)

(D-1) J. Diestel Geometry of Banach spaces-selected topics. Lecture Notes in Math. 485. Springer-Verlag (1975)

(D-2) J. Diestel Sequences and series in Banach spaces. Graduate Texts in Math. 92. Springer-Verlag. (1984)

(D-U-1) J. Diestel & J. J. Uhl. Jr. Vector measures Math. Surveys. no. 15. (1977)

(Da-1) M. M. Day Normed linear spaces. Springer-Verlag. (1973)

(Du-1) D. van Dulst The geometry of Banach spaces with the Radon-Nikodym property. Sup. rendiconti no. 7 (1985)

(H-1) R. B. Holmes Geometrical functional analysis and its applications. Springer-Verlag (1975)

(L-T-Ⅰ, Ⅱ) J. Lindenstrauss & L. Tzafriri Classical Banach spaces Ⅰ. Ⅱ. Springer-Verlag. (1977). (1979)

(P-1) G. Pisier Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces.
Conf. Boad. of the Math. Sciences. no. 60 (1986)

(俞-1) 俞鑫泰 Banach空间几何理论 华东师大出版社 (1986)。

名词索引

A

B

C

D

E

N

O

P

Q

R

S